CORRIGÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

Corrigé 0.1 Bifurcation noeud-col analytique

1)Le premier cas est obtenu pour $\alpha\,\mu > 0$, c'est-à-dire $\alpha < 0$ avec $\mu < 0$ ou $\alpha > 0$ avec $\mu > 0$. Dans ces deux cas, l'ensemble des équilibres est vide. On s'attend donc à des solutions $x(t)$ allant de $-\infty$ à $+\infty$ ou de $+\infty$ à $-\infty$. Dans ce cas, on pose $b = \sqrt{\mu/\alpha}$ et le système s'écrit

$$\dot{x} = \mu + \alpha\, x^2 = \mu\left[(x/b)^2 + 1\right] \; . \tag{1}$$

On en déduit que $\mathrm{arctg}\,(x/b) = \mu\, b\, t + \mathrm{arctg}\,(x_0/t)$ où $x(0) = x_0$ est la condition initiale. La solution s'écrit alors

$$\frac{x(t)}{b} = \mathrm{tg}\,\left[\frac{\mu}{b}t + \mathrm{arctg}\,\left(\frac{x_0}{b}\right)\right] = \frac{\mathrm{tg}\,\left(\frac{\mu}{b}t\right) + \frac{x_0}{b}}{1 - \frac{x_0}{b}\mathrm{tg}\,\left(\frac{\mu}{b}t\right)} \; . \tag{2}$$

On peut voir l'ensemble des solutions comme étant la famille des courbes

$$x(t) = b\;\mathrm{tg}\,\left[\frac{\mu}{b}(t - t_0)\right] \tag{3}$$

où t_0 est un réel quelconque, c'est-à-dire l'ensemble des translatées en temps de la courbe particulière $b\,\mathrm{tg}\,\left(\frac{\mu}{b}t\right)$. Par rapport à la condition initiale $x(0) = x_0$, à $t = 0$ on a $t_0 = -(b/\mu)\mathrm{arctg}\,(x_0/b)$. Ces trajectoires vont de $-\infty$ à $+\infty$ pour $\mu > 0$ (et donc $\alpha < 0$) et de $+\infty$ à $-\infty$ pour $\mu < 0$ (et donc $\alpha > 0$). On note d'autre part que les trajectoires mettent un temps fini $T = \pi\, b/\mu$ pour relier les deux infinis.

2)Le second cas est obtenu pour $\alpha\,\mu < 0$, c'est-à-dire $\alpha < 0$ avec $\mu > 0$ ou $\alpha > 0$ avec $\mu < 0$. Dans ces deux cas, l'ensemble des équilibres est $\{-a, a\}$ avec $a = \sqrt{-\mu/\alpha}$. On s'attend donc à des solutions $x(t)$ allant de $-\infty$ à a, de $-a$ à a ou de a à $+\infty$. Dans ce cas, le système s'écrit

$$\dot{x} = \mu + \alpha\, x^2 = \alpha(x - a)(x + a) \; . \tag{4}$$

Un décomposition en éléments simples permet d'écrire cette équation sous la forme

$$\frac{1}{2\,\alpha\, a}\left(\frac{\dot{x}}{x - a} - \frac{\dot{x}}{x + a}\right) = 0 \; . \tag{5}$$

L'intégration en temps conduit au logarithme d'une valeur absolue qui conduit à l'expression

$$\frac{x - a}{x + a} = \frac{x_0 - a}{x_0 + a}\, e^{2\alpha a t} = \frac{x_0 - a}{x_0 + a}\, e^{-2\frac{\mu}{a}t} \tag{6}$$

en remarquant que $\alpha a = \mu/a$. On en déduit la solution

$$\frac{x(t)}{a} = \frac{\frac{x_0}{a}(e^{2\frac{\mu}{a}t}+1)+(e^{2\frac{\mu}{a}t}-1)}{\frac{x_0}{a}(e^{2\frac{\mu}{a}t}-1)+(e^{2\frac{\mu}{a}t}+1)} \tag{7}$$

En effectuant quelques transformations, la solution s'écrit finalement

$$x(t) = a\,\frac{\frac{x_0}{a} - \mathrm{th}\left(\frac{\mu}{a}t\right)}{1-\frac{x_0}{a}\mathrm{th}\left(\frac{\mu}{a}t\right)}\;. \tag{8}$$

On peut classer ces solutions en trois familles. Si $x_0 \in [-a, a]$, la solution $x(t)$ issue de cette condition initiale appartient à la famille des courbes

$$x(t) = -a\;\mathrm{th}\left[\frac{\mu}{a}(t-t_0)\right] \tag{9}$$

où t_0 est un réel quelconque, c'est-à-dire l'ensemble des translatées en temps de la courbe particulière $-a\,\mathrm{th}\left(\frac{\mu}{a}t\right)$. Par rapport à la condition initiale $x(0) = x_0$ à $t = 0$ on a $t_0 = (a/\mu)\mathrm{argth}\,(x_0/a)$. Ces trajectoires vont de $-a$ à $+a$ pour $\mu > 0$ (et donc $\alpha > 0$) et de $+a$ à $-a$ pour $\mu < 0$ (et donc $\alpha < 0$).

Si $x_0 > a$ ou $x_0 < -a$, les solution $x(t)$ issues de ces deux types de conditions initiales appartiennent à la famille des courbes

$$x(t) = -a\mathrm{th}\left[\frac{\mu}{a}(t-t_0)\right] \tag{10}$$

avec $t > t_0$ si $x_0 > a$ et $t < t_0$ pour $x_0 < -a$. Comme t_0 est un réel quelconque, ces courbes sont l'ensemble des translatées en temps de la courbe particulière $-a\mathrm{th}\left(\frac{\mu}{a}t\right)$. Par rapport à la condition initiale $x(0) = x_0$ à $t = 0$ on a $t_0 = -(a/\mu)\mathrm{argth}\,(a/x_0)$. Ces trajectoires vont de $+\infty$ à $+a$ ou de $-a$ à $-\infty$ pour $\mu > 0$ (et donc $\alpha < 0$) et de $-\infty$ à $-a$ ou de $+a$ à $+\infty$ pour $\mu < 0$ (et donc $\alpha > 0$). Pour ces trajectoires, t_0 est aussi le temps fini qu'il faut pour atteindre l'infini à partir de la condition initial x_0.

3)On vérifie que les diagrammes de bifurcation obtenus pour $\alpha\mu < 0$ ou $\alpha\mu > 0$ correspondent bien au comportement des solutions analytiques qui vient d'être décrit.

Corrigé 0.2 Bifurcation fourche analytique

1)Dans le cas $\alpha\,\mu > 0$, on sait que 0 est le seul équilibre et que les trajectoires joignent 0 et l'infini. On pose alors

$$\dot{x} = \mu\,x + \alpha\,x^3 = \mu\,\frac{x}{b}\left(\frac{x^2}{b^2}+1\right) \tag{11}$$

avec $b = \sqrt{\mu/\alpha}$. Un décomposition en éléments simples permet d'écrire le système sous la forme

$$\frac{\dot{x}}{b}\left(\frac{1}{x/b} - \frac{x/b}{1 + x^2/b^2}\right) = \mu\ . \tag{12}$$

L'intégration de ce système conduit à des logarithmes de valeurs absolues puis à

$$\frac{x(t)}{b} = \frac{1}{\sqrt{(1 + b^2/x_0^2)\exp(-2\mu\, t) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\exp[-2\mu\,(t - t_0)] - 1}} \tag{13}$$

avec $t_0 = \frac{1}{2\mu}\mathrm{Ln}\,(1 + b^2/x_0^2)$. Cette famille de trajectoires est constituée des translatées en temps des courbes $x(t) = b/\sqrt{\exp(-2\mu t) - 1}$ définies pour $t < 0$ lorsque $\mu > 0$ (et donc $\alpha > 0$) et pour $t > 0$ lorsque lorsque $\mu < 0$ (et donc $\alpha < 0$). Ces trajectoires relient l'infini et l'état x_0 en un temps fini égal à t_0.

2)Dans le cas $\alpha\,\mu < 0$, on sait que l'ensemble des équilibres est $\{-a, 0, a\}$ avec $a = \sqrt{-\mu/\alpha}$. On pose alors

$$\dot{x} = \mu\, x + \alpha\, x^3 = \alpha(x + a)(x - a)x\ . \tag{14}$$

Un décomposition en éléments simples permet d'écrire le système sous la forme

$$\frac{\dot{x}}{x + a} + \frac{\dot{x}}{x - a} - 2\frac{\dot{x}}{a} = 2a^2\alpha\ . \tag{15}$$

En remarquant que $a^2\alpha = -\mu$, l'intégration de ce système conduit à des logarithmes de valeurs absolues puis à

$$\frac{x(t)}{a} = \pm\frac{1}{\sqrt{(a^2/x_0^2 - 1)\exp(-2\mu\, t) + 1}} \tag{16}$$

On n'étudie alors que le cas $x(t) > 0$, le cas $x(t) < 0$ s'en déduisant par symétrie.

On peut classer ces solutions en deux familles. Pour $|x_0| < a$ les solutions s'écrivent sous la forme

$$x(t) = b/\sqrt{\exp[-2\mu(t - t_0)] + 1} \tag{17}$$

avec $t_0 = (1/2\mu)\mathrm{Ln}\,(a^2/x_0^2 - 1)$. Ce sont les translatées en temps de la trajectoire $b/\sqrt{\exp(-2\mu t) + 1}$ qui est définie pour $t \in \mathbb{R}$. Ces trajectoires vont de 0 à a pour $\mu > 0$ (et donc $\alpha < 0$) et de a à 0 pour $\mu < 0$ (et donc $\alpha > 0$).

Pour $|x_0| > a$ les solutions s'écrivent sous la forme

$$x(t) = b/\sqrt{1 - \exp[-2\mu(t - t_0)]} \tag{18}$$

avec $t_0 = (1/2\mu)\mathrm{Ln}\,(1 - a^2/x_0^2)$. Ce sont les translatées en temps de la trajectoire $b/\sqrt{1 - \exp(-2\mu t)}$ qui est définie pour $t > 0$ si $\mu > 0$ (et donc $\alpha < 0$) et pour $t < 0$ si $\mu < 0$ (et donc $\alpha > 0$). Ces trajectoire relient l'état x_0 et l'infini en un temps qui est égal à t_0.

3)On vérifie que les diagrammes de bifurcation obtenus pour $\alpha\mu < 0$ ou $\alpha\mu > 0$ correspondent bien au comportement des solutions analytiques qui vient d'être décrit.