

# COURS ÉCRIT

1	Bifurcation noeud-col . . . . .	2
2	Bifurcation fourche . . . . .	6
3	Bifurcation de Hopf . . . . .	9
4	Formes normales et catastrophes . . . . .	11

## Introduction

Un grand nombre de modèles issus de la mécanique des milieux continus s'écrivent sous la forme de systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques ou de systèmes d'équations différentielles ordinaires, le temps étant la variable décrivant l'évolution du système. On parle de "systèmes dynamiques" pour les équations différentielles ordinaires et on appelle "nombre de degrés de liberté" le nombre d'équations couplées du système. La résolution numérique des équations aux dérivées partielles se ramène toujours à un système dynamique, en discrétisant l'espace ou en projetant sur un ensemble fini de fonctions. Le nombre de degrés de liberté est alors grand si la résolution spatiale est grande.

Une première approche pour l'étude de ces équations d'évolution consiste à rechercher les équilibres, c'est-à-dire les solutions stationnaires ne présentant pas d'évolution temporelle. On dit qu'un équilibre est stable si une petite perturbation de cet équilibre évolue dans le temps en restant petite et en convergeant vers zéro. Le système revient alors dans sa position d'équilibre. Ces équilibres ont donc de grandes chances d'être observés sur le système physique étudié ou sur la simulation numérique du modèle proposé.

L'étape suivante consiste à faire varier un ensemble de paramètres contrôlant le système, comme par exemple l'intensité du forçage ou les dimensions géométriques du domaine. On regarde alors ce que deviennent les équilibres du

modèle, en particulier ceux qui étaient stables avant de modifier les paramètres de contrôle. Lorsqu'en variant les valeurs des paramètres de contrôle, un équilibre stable devient instable ou disparaît, on dit que l'on est en présence d'une "bifurcation". L'étude systématique des bifurcations fait appel à un arsenal mathématique développé (formes normales) qui a permis de classifier un grand nombre de comportements observés dans les systèmes physiques.

Ici nous ne nous intéressons qu'aux bifurcations les plus courantes pouvant affecter un équilibre lorsque l'on varie des paramètres de contrôle. Faire varier continuellement  $n$  paramètres de contrôle peut être vu comme un chemin continu dans un espace vectoriel de dimension  $n$ . Nous verrons que la déstabilisation d'un équilibre correspond au changement de signe de la partie réelle d'une des valeurs propres de l'opérateur linéaire gouvernant les petites perturbations du voisinage de cet équilibre. On voit donc que ce changement de signe définit une surface de codimension 1 dans l'espace de contrôle. En suivant un chemin continu dans l'espace de contrôle, on a de bonnes chances de traverser cette surface et d'assister alors à la déstabilisation de l'équilibre. Une telle bifurcation de codimension 1 est dite "générique". Pour observer des bifurcations non génériques, c'est-à-dire de codimension supérieure à 1, il faut faire varier plusieurs paramètres de contrôle à la fois. Il est donc impossible de les rencontrer en variant au hasard les paramètres de contrôle.

La théorie des formes normales appliquées aux systèmes dynamiques montre qu'il n'y a que trois bifurcations génériques de l'équilibre. Lorsque la valeur propre responsable de la déstabilisation est réelle, on parle de bifurcation stationnaire. On est alors en présence d'une bifurcation "noeud-col" dans le cas général, et "fourche" lorsque qu'il y a "brisure d'une symétrie". Lorsque qu'une paire de valeurs propres complexes conjuguées traversent l'axe des imaginaires, on est en présence d'une bifurcation "de Hopf".

Nous allons étudier ces trois bifurcations (noeud-col, fourche et Hopf) sur les exemples les plus simples, qui sont, par ailleurs, les "formes normales" de tous les systèmes dynamiques à plus grand nombre de degrés de liberté dont les équilibres subissent l'une de ces bifurcations.

## 1 Bifurcation noeud-col

On considère l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\dot{x} = \mu + \alpha x^2 . \tag{1}$$

On s'intéresse à l'ensemble de toutes les solutions de ce système dynamique.

### 1.1 Éléments de vocabulaire sur les systèmes dynamiques

On appelle “espace des phases” l’ensemble des états  $x \in \mathbb{R}$ . On appelle espace de contrôle l’ensemble des paramètres  $(\mu, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ . Pour ce système dynamique, l’espace des phases est donc de dimension 1. On dit qu’il s’agit d’un système dynamique à un degré de liberté. L’espace de contrôle est de dimension 2.

Les systèmes dynamiques autonomes (indépendants du temps) à un degré de liberté s’écrivent sous la forme :

$$\dot{x} = f(x) = F(\underline{\mu}; x) \quad (2)$$

où  $\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$  appartient à l’espace de contrôle. On suppose que  $f(x)$  est une fonction continuellement dérivable. Une solution quelconque  $x(t)$  d’un tel système dynamique décrit une trajectoire dans l’espace des phases. Elle est issue d’une condition initiale  $x(0) = x_0$  à  $t = 0$ . Les trajectoires dans un espace des phases de dimension 1 ont pour support quatre types de courbes : un point, un segment ouvert, une demi-droite ouverte ou la droite tout entière. Un point d’équilibre  $x_e$ , qui forme à lui seul une trajectoire, est solution de l’équation  $f(x_e) = F(\underline{\mu}, x_e) = 0$ .

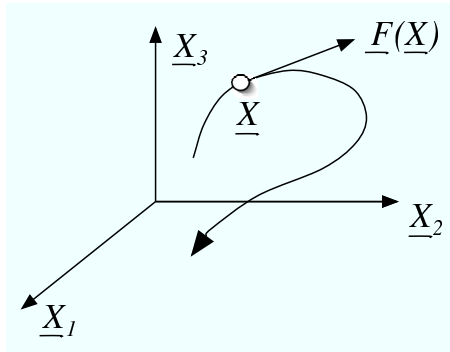


Figure 1: Système dynamique à trois degrés de libertés.

Les systèmes dynamiques autonomes (indépendants du temps) à  $n$  degrés de liberté s’écrivent sous la forme

$$\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{\mu}; \underline{X}) \quad (3)$$

avec  $\underline{X} \in \mathbb{R}^n$  appartenant à l’espace des phases. Il s’agit d’un système d’équations différentielles ordinaires couplées que l’on peut aussi écrire sous la forme

$$\dot{X}_i = F_i(\mu_1, \dots, \mu_m; X_1, \dots, X_n) \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (4)$$

On suppose que  $\underline{F}$  est continuellement différentiable. Une solution  $\underline{X}(t)$  de ce système décrit une trajectoire dans l'espace des phases. Un point d'équilibre  $\underline{X}_e$ , formant à lui seul une trajectoire, est solution de l'équation implicite  $\underline{F}(\underline{\mu}; \underline{X}_e) = \underline{0}$ . On dit aussi que c'est une solution stationnaire ou encore un point critique du système dynamique.

On montre (théorème de Cauchy) qu'une condition initiale  $\underline{X}(0)$  donne naissance à une et une seule trajectoire  $\underline{X}(t)$ . On en déduit que, pour un système dynamique autonome, deux trajectoires l'espace des phases ne se coupent jamais. Deux courbes contenant des trajectoires se coupent en une trajectoire qui est un point d'équilibre.

Les systèmes dynamiques non autonomes à  $n$  degrés de liberté s'écrivent sous la forme

$$\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{\mu}; \underline{X}, t) \quad (5)$$

avec  $\underline{X} \in \mathbb{R}^n$  appartenant à l'espace des phases. On peut les ramener au cas des systèmes autonomes à  $n + 1$  degrés de liberté en considérant le temps  $t$  comme une variable  $X_{n+1} = t$  supplémentaire de l'espace des phases et en ajoutant l'équation  $\dot{X}_{n+1} = 1$ . Notons que ce nouveau système dynamique ne peut pas admettre d'équilibre.

## 1.2 Bifurcation noeud-col pour $\alpha < 0$ .

On suppose que  $\alpha$  est négatif. La recherche des solutions stationnaires conduit à résoudre l'équation  $f(x) = 0$  que l'on écrit

$$F(\mu, \alpha; x) = \mu + \alpha x^2 = 0 . \quad (6)$$

L'ensemble des solutions stationnaire est l'ensemble vide  $\emptyset$  pour  $\mu < 0$ , le singleton  $\{0\}$  pour  $\mu = 0$  et  $\{-a, a\}$  pour  $\mu > 0$  avec  $a = \sqrt{-\mu/\alpha}$ .

On dit qu'un point d'équilibre  $x_e$ , vérifiant donc  $f(x_e) = 0$ , est stable, si une petite perturbation  $u(0)$  autour de cet équilibre est amortie au cours du temps. Autrement dit, si la condition initiale  $x(0) = x_e + u(0)$ , avec  $u(0)$  "petit", donne naissance à une trajectoire  $x(t) = x_e + u(t)$  convergeant vers  $x_e$ , c'est-à-dire tel que  $u(t)$  tend vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini.

Pour déterminer si un équilibre  $x_e$  d'un système dynamique  $\dot{x} = f(x)$  est stable, on effectue le développement limité suivant

$$\dot{x}(t) = \dot{u}(t) = f[x_e + u(t)] = f'(x_e) u(t) + O(|u(t)|^2) . \quad (7)$$

On a utilisé ici  $\dot{x}_e = 0$  et  $f(x_e) = 0$ . Tant que  $u(t)$  reste petit, la solution peut être approchée en résolvant l'équation

$$\dot{u} = \lambda u \quad (8)$$

avec  $\lambda = f'(x_e)$ . On dit que l'on a linéarisé le système dynamique autour de l'équilibre  $x_e$ .

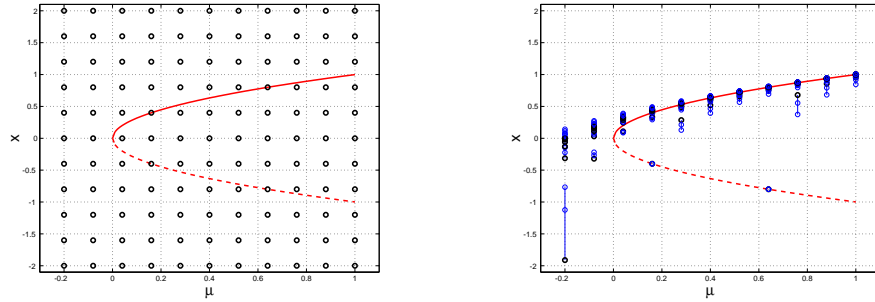


Figure 2: Diagramme  $(\mu, x)$  de la bifurcation noeud-col. a) Conditions initiales  $[\mu, x(0)]$  répartie régulièrement. b) Positions des points  $[\mu, x(t)]$  au bout du temps  $t$ .

En tenant compte de sa condition initiale, la solution de ce système s'écrit

$$u(t) = u(0) \exp(\lambda t) . \quad (9)$$

On voit alors que, pour  $\lambda = f'(x_e) < 0$ , la perturbation  $u(t)$  tend vers zéro. L'équilibre est alors stable. Lorsque  $f'(x_e) > 0$ , l'équilibre est instable et le système linéarisé cesse d'être valide lorsque  $u(t)$ , qui croît exponentiellement, devient trop grand. Pour le cas critique  $f'(x_e) = 0$ , on dit que l'équilibre est marginal. Pour cette valeur très particulière, l'étude de stabilité, lorsqu'on s'y intéresse, nécessite de pousser le développement limité de  $f(x)$  autour de  $x_e$  jusqu'au terme d'ordre 2, ce qui conduit à une équation non linéaire.

Dans le cas général d'un système dynamique à  $n$  degrés de libertés  $\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X})$ , on montre que la stabilité d'un équilibre  $\underline{X}_e$  vérifiant  $\underline{F}(\underline{X}_e) = \underline{0}$  dépend du signe de la partie réelle de la matrice  $\underline{D}\underline{F}(\underline{X}_e)$  jacobienne de l'application  $\underline{F}$  et de composantes  $\partial F_i / \partial X_j$ . En effet, si on pose  $\underline{X} = \underline{X}_e + \underline{U}$ , on doit résoudre  $\dot{\underline{U}} = \underline{D}\underline{F}(\underline{X}_e) \underline{U} + O(\|\underline{U}\|^2)$ . Dans le cas  $n = 1$  qui nous intéresse ici, la jacobienne n'a qu'une composante qui est  $f'$ .

Pour l'exemple particulier qui nous intéresse ici, on a  $f'(x) = 2\alpha x$ . La stabilité des équilibres est donc donnée par les nombres  $\lambda = f'(x_-) = 2\sqrt{-\alpha}\mu$  pour  $x_- = -a$  et  $\lambda = f'(x_+) = -2\sqrt{-\alpha}\mu$  pour  $x_+ = a$ . On peut donc affirmer que l'équilibre  $x_-$  est instable et que l'équilibre  $x_+$  est stable.

Une méthode graphique pour la détermination de la stabilité des équilibres d'un système dynamique à un seul degré de liberté consiste à tracer la fonction  $f(x)$ . Ses zéros correspondent aux équilibres et les pentes en ces points indiquent leur stabilité : stable si la pente est négative, instable si la pente est positive.

### 1.3 Cas $\alpha > 0$ et diagrammes de bifurcation

L'examen du cas  $\alpha > 0$  est identique. L'ensemble des solutions est  $\{-a, a\}$  pour  $\mu < 0$  avec  $a = \sqrt{-\mu/\alpha}$ , le singleton  $\{0\}$  pour  $\mu = 0$  et l'ensemble vide  $\emptyset$  pour  $\mu > 0$ . On calcule  $\lambda = f'(x_-) = -2\sqrt{-\alpha \mu}$  pour l'équilibre  $x_- = -a$  et  $\lambda = f'(x_+) = 2\sqrt{-\alpha \mu}$  pour  $x_+ = a$ . On peut donc affirmer que l'équilibre  $x_-$  est stable et que l'équilibre  $x_+$  est instable.

On peut rassembler tous ces résultats en traçant deux diagrammes de bifurcation. Pour  $\alpha < 0$ , on trace d'abord les courbes des solutions  $x_e(\mu)$  dans un plan  $(\mu, x)$  (parabole orientée vers les  $\mu$  positifs). Par convention, on trace en trait plein la courbe des équilibres stables, ici  $x_+(\mu)$ , et en traits pointillés la courbe des équilibre instables, ici  $x_-(\mu)$ . Pour un  $\mu$  fixé, il est alors facile de tracer les trajectoires. Celles-ci s'écartent des points instables pour converger vers les points stables. On trace donc des droites dirigées vers les  $x > 0$  pour  $\mu \leq 0$ . Pour  $\mu > 0$  on trace des demi-droites allant de  $-\infty$  à  $x_-$ , des segments de droites allant de  $x_-$  à  $x_+$ , puis des demi-droites allant de  $x_+$  à  $+\infty$ .

Pour  $\alpha > 0$ , on trace un nouveau diagramme de bifurcation ayant l'allure suivante. Pour  $\mu < 0$ , on trace des demi-droites allant de  $-\infty$  à  $x_-$ , des segments de droites allant de  $x_-$  à  $x_+$ , puis des demi-droites allant de  $x_+$  à  $\infty$ . Pour  $\mu \geq 0$  on trace des droites allant de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

On remarque que l'on passe du cas  $\alpha < 0$  au cas  $\alpha > 0$  en changeant  $\alpha \rightarrow -\alpha$ ,  $\mu \rightarrow -\mu$ ,  $t \rightarrow -t$  et  $x \rightarrow x$  ou bien encore en changeant  $\alpha \rightarrow -\alpha$ ,  $\mu \rightarrow -\mu$ ,  $t \rightarrow t$  et  $x \rightarrow -x$ . Ces symétries sont visibles en comparant les diagrammes de bifurcations et le sens des trajectoires, ou encore le tracé des diverses fonctions  $x(t)$  en fonction du temps.

Cette étude montre que la valeur  $\mu = 0$  correspond à un changement du nombre d'équilibres. Pour cette valeur du paramètre de contrôle, un équilibre stable et un équilibre instable se rejoignent. On parle alors de bifurcation "noeud-col" (saddle-node en anglais).

## 2 Bifurcation fourche

On considère maintenant l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\dot{x} = \mu x + \alpha x^3. \quad (10)$$

On cherche à tracer le diagramme de bifurcation de ce système dynamique. On note dès à présent la symétrie  $\mu \rightarrow -\mu$ ,  $t \rightarrow -t$ ,  $x \rightarrow -x$ . Une autre symétrie est obtenue en ne modifiant pas les paramètres de contrôle ni le sens de l'axe des temps. Cette symétrie est la symétrie point  $x \rightarrow -x$  dans  $\mathbb{R}$

et l'on voit que si  $x(t)$  est une solution, la fonction  $y(t) = -x(t)$  est aussi une solution. Cette symétrie particulière joue un rôle très important pour la bifurcation fourche, comme nous allons le voir.

### 2.1 Diagramme de bifurcation

On considère tout d'abord le cas  $\alpha < 0$ . L'ensemble des équilibres est obtenu en cherchant les racines de l'équation  $f(x_e) = \mu x_e + \alpha x_e^3 = 0$ . Cet ensemble est  $\{0\}$  pour  $\mu \leq 0$  et  $\{-a, 0, a\}$  avec  $a = \sqrt{\mu/\alpha}$  pour  $\mu > 0$ . La stabilité de 0 dépend du signe de  $f'(0) = \mu$ . Pour  $\mu < 0$  l'équilibre 0 est stable, il est instable pour  $\mu > 0$ .

La stabilité de  $x_- = -a$  est la même que celle de  $x_+ = a$  dans la mesure où  $f'(x_-) = f'(x_+) = -2\mu$ . Pour  $\mu > 0$ , c'est-à-dire lorsqu'ils existent, ces équilibres sont stables. On trace alors le diagramme de bifurcation correspondant à ce cas  $\alpha < 0$ . Pour  $\mu < 0$ , deux trajectoires (demi-droites) venant respectivement de  $-\infty$  et  $+\infty$  convergent le point d'équilibre  $x = 0$ . Pour  $\mu > 0$  deux trajectoires (segments de droites) s'écartent de  $x = 0$  pour converger respectivement vers  $x_- = -a$  et  $x_+ = a$ , et deux trajectoires (demi-droites) s'écartent respectivement de ces équilibres pour converger vers  $-\infty$  et  $+\infty$ . Le nombre d'équilibre et leur stabilité peuvent se voir graphiquement en traçant la fonction  $f(x) = F(\mu, \alpha; x)$  lorsque  $\mu$  est négatif ou positif.

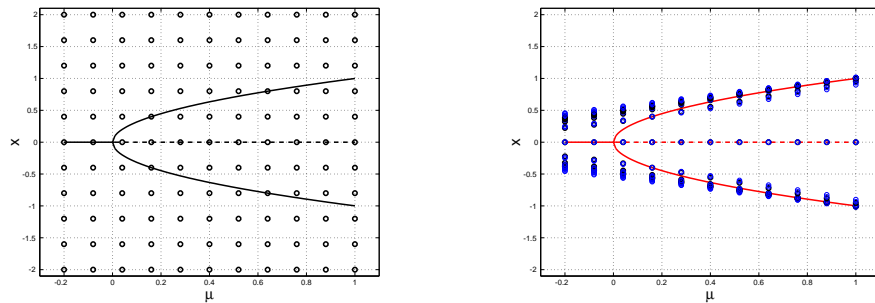


Figure 3: Diagramme  $(\mu, x)$  de la bifurcation fourche. a) Conditions initiales  $[\mu, x(0)]$  répartie régulièrement. b) Positions des points  $[\mu, x(t)]$  au bout du temps  $t$ .

Dans le cas  $\alpha > 0$ , l'ensemble des équilibres est  $\{-a, 0, a\}$  avec  $a = \sqrt{-\mu/\alpha}$  pour  $\mu < 0$  et  $\{0\}$  pour  $\mu \geq 0$ . La stabilité de l'équilibre  $x = 0$  est la même que pour le cas  $\alpha < 0$  : stable pour  $\mu < 0$  et instable pour  $\mu > 0$ . La stabilité de  $x_- = -a$  et  $x_+ = a$  dépend du signe de  $f'(x_-) = f'(x_+) = -2\alpha\mu$  : ces deux équilibres sont instables sur leur domaine d'existence  $\mu < 0$ . Pour  $\mu < 0$ , le diagramme de bifurcation fait apparaître deux trajectoires (demi-droites) allant

respectivement de  $-a$  à  $-\infty$  et de  $+a$  à  $+\infty$  ainsi qu'une trajectoire (segment de droite) allant de  $-a$  à  $+a$ . Pour  $\mu > 0$ , deux trajectoires s'écartent de l'équilibre  $x = 0$  pour aller respectivement vers  $-\infty$  ou  $+\infty$ .

## 2.2 Brisure de symétrie

On dit que la bifurcation est supercritique dans le cas  $\alpha < 0$  et sous-critique (ou subcritique) dans le cas  $\alpha > 0$ . Dans le cas supercritique, l'état d'équilibre  $x = 0$  se déstabilise lorsque  $\mu$  devient positif pour donner naissance à deux états d'équilibre symétriques dans l'amplitude  $a$  croît progressivement avec  $\mu$  comme  $\sqrt{\mu}$ . Dans le cas sous-critique, une perturbation d'amplitude finie avant le seuil de déstabilisation de l'équilibre  $x = 0$  peut conduire à une trajectoire divergente si cette perturbation est suffisamment grande.

La symétrie point  $S : x \rightarrow -x$  joue un rôle important dans cette bifurcation. On rappelle que si  $x(t)$  est une solution la fonction  $y(t) = Sx(t) = -x(t)$  est aussi solution. En écrivant le système dynamique sous la forme  $\dot{x} = f(x)$ , l'invariance de ce système par la symétrie  $S$  s'écrit  $S\dot{x}(t) = f[Sx(t)] = Sf[x(t)]$ . On remarque que l'équilibre  $x = 0$  est invariant par la symétrie ( $S0 = 0$ ) et que les équilibres bifurqués sont deux à deux symétriques ( $Sx_- = x_+$  et  $Sx_+ = x_-$ ).

Dans le cas général d'un système dynamique  $\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X})$ , on dit que l'opérateur linéaire  $\underline{S}$  est une symétrie du système si  $\underline{F}(\underline{S}\underline{X}) = \underline{S}\underline{F}(\underline{X})$  pour tout vecteur d'état  $\underline{X} \in \mathbb{R}^n$  de l'espace des phases. Par définition  $\underline{S}$  est une matrice  $n \times n$  vérifiant  $\underline{S}\underline{S} = \underline{I}$  (identité). Cette définition entraîne que si  $\underline{X}(t)$  est solution, alors  $\underline{Y}(t) = \underline{S}\underline{X}(t)$  est aussi solution. Un équilibre  $\underline{X}_e$  est invariant par la symétrie si  $\underline{S}\underline{X}_e = \underline{X}_e$ . En changeant l'origine de l'espace des phases, on peut toujours se ramener au cas  $\underline{X}_e = \underline{0}$ , ce que nous supposons ici.

Lorsque l'équilibre symétrique  $\underline{X}_e = \underline{0}$  se déstabilise, il peut donner naissance à de nouveaux équilibres qui sont eux-mêmes symétriques. Dans ce cas, il n'y a pas brisure de symétrie. Lorsqu'il y a brisure de symétrie, les équilibres bifurqués forment des paires  $(\underline{X}_-, \underline{X}_+)$  telles que  $\underline{S}\underline{X}_- = \underline{X}_+$  et  $\underline{S}\underline{X}_+ = \underline{X}_-$ . Dans les cas génériques, une seule paire de telles solutions prend naissance à la bifurcation, et par symétrie,  $\underline{X}_e = \underline{0}$  reste un équilibre, devenu instable. On montre que la brisure de symétrie dépend du vecteur propre l'opérateur linéaire décrivant l'évolution des petites perturbations autour de  $\underline{X}_e = \underline{0}$ , associé à la valeur propre qui s'annule à la bifurcation. Lorsque ce vecteur propre est invariant par  $\underline{S}$ , la symétrie n'est pas brisée. Elle l'est dans le cas contraire.



### 3 Bifurcation de Hopf

On considère maintenant l'équation différentielle ordinaire complexe suivante :

$$\dot{z} = (\mu + i\omega) z + (\alpha + i\beta) |z|^2 z \quad (11)$$

où  $z \in \mathcal{C}$  est une variable complexe. En posant  $z = x + iy$ , on se ramène à un système dynamique à deux degrés de liberté. L'espace des phases est de dimension 2, tandis que l'espace de contrôle décrivant les paramètres  $\mu$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  est de dimension 4.

Très souvent, on s'intéresse à la partie réelle des solutions complexes  $z(t)$  de cette équation. Ces amplitudes complexes sont par exemple la projection d'un état sur un vecteur propre associé à une valeur propre complexe  $(\mu + i\omega)$ . On cherche à décrire le diagramme de bifurcation de ce système.

#### 3.1 Déstabilisation de l'équilibre

En posant  $z(t) = \rho(t) \exp[i\theta(t)]$  avec  $\rho(t) > 0$ , le système s'écrit

$$\dot{\rho} = \mu \rho + \alpha \rho^3 \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = \omega + \beta \rho^2 . \quad (12)$$

On remarque que l'évolution du module  $\rho(t)$  est découplée de celle de  $\theta(t)$  et que son étude a déjà été réalisée lors de l'étude de la bifurcation fourche. L'évolution de la phase  $\theta(t)$  dépend alors de celle de  $\rho(t)$  de manière simple.

On peut alors tracer les diagrammes de bifurcation de la bifurcation de Hopf à la lumière des diagrammes de bifurcation de la bifurcation fourche. Ces nouveaux diagrammes peuvent être représentée dans l'espace tridimensionnel  $(\mu, x, y)$  où  $x$  et  $y$  sont les parties réelles et imaginaires de  $z$ . Pour  $\mu$  fixé, les trajectoires parcourent donc des courbes dans un espace de dimension 2 que l'on peut voir comme  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathcal{C}$ .

Pour  $\mu < 0$ , l'équilibre stable  $\rho = 0$  de la bifurcation fourche, correspond à un équilibre stable  $z = 0$ . La décomposition polaire  $z = \rho \exp(i\theta)$  n'est pas valable pour cet équilibre même (la phase est indéterminée) mais reste pertinente dans tout voisinage. Cet équilibre devient donc instable pour  $\mu > 0$ . On peut retrouver directement ce résultat en remarquant que le système s'écrit

$$\dot{z} = (\mu + i\omega) z + O(|z|^3) \quad (13)$$

lorsque  $z$  est petit, c'est-à-dire proche de l'équilibre  $z = 0$ . L'intégration du système linéarisé conduit alors à  $z(t) = z(0) \exp(\mu t) \exp(i\omega t)$ . On voit que  $|z(t)| = \exp(\mu t)$  tend vers zéro pour  $\mu < 0$  et ne reste pas petit  $\mu > 0$ . Dans le

voisinage de zéro, les trajectoires forment alors des spirales logarithmiques de raison  $\mu$  et de pulsation  $\omega$ . Ces spirales convergent vers 0 dans le cas stable, ou divergent à partir de 0 dans le cas instable.

### 3.2 Diagramme de bifurcation

Considérons tout d'abord le cas supercritique  $\alpha < 0$ . Pour  $\mu < 0$ , les modules  $\rho(t)$  des trajectoires vont de  $-\infty$  vers 0. La vitesse angulaire  $\dot{\theta} = \omega + \beta\rho^2$  est très rapide à l'infini et se stabilise à  $\omega$  lorsque les trajectoires arrivent dans le voisinage de zéro. Si cette vitesse angulaire garde le même signe de l'infini à  $\omega$ , les trajectoires dans  $\mathcal{C}$  ont l'allure de spirales tournant toutes dans le même sens.

Pour  $\mu > 0$ , L'équilibre stable  $\rho_e = a$  avec  $a = \sqrt{-\mu/\alpha}$  correspond à une trajectoire périodique stable  $z(t) = a \exp(i\omega_e t)$  avec  $\omega_e = \omega + \beta a^2$ . Cette trajectoire décrit un cercle dans la mesure où le module est constant. Si l'on perturbe cette solution en considérant une condition initiale dans le voisinage proche de la trajectoire périodique, la petite perturbation ainsi introduite convergera vers zéro. On dit que cette trajectoire période est un "cycle limite", ce mot étant synonyme de stabilité.

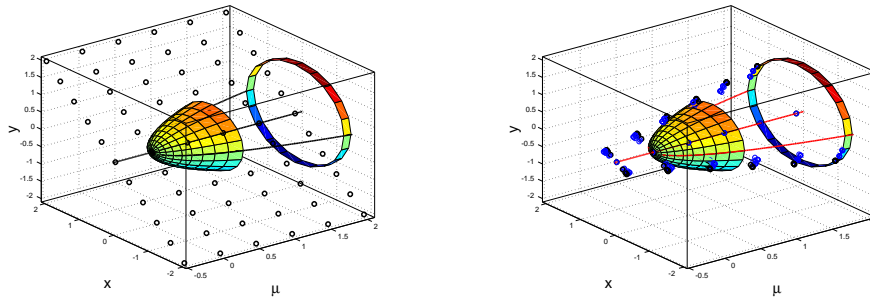


Figure 4: Diagramme  $(\mu, x)$  de la bifurcation de Hopf. a) Conditions initiales  $[\mu, x(0)]$  répartie régulièrement. b) Positions des points  $[\mu, x(t)]$  au bout du temps  $t$ .

Le module  $\rho$  des autres trajectoires va de 0 à  $a = \sqrt{-\mu/\alpha}$  ou de  $a$  à l'infini. Dans le premier cas, ces trajectoires décrivent des spirales divergente autour de zéro et qui approchent exponentiellement le cycle limite par l'intérieur. Dans le second cas, ces trajectoires décrivent des spirales venant de l'infini et convergeant vers le cycle limite par son extérieur.

Le cas sous-critique  $\alpha > 0$  conduit au diagramme de bifurcation suivant. Pour  $\mu < 0$ , il existe un trajectoire période  $z(t) = a \exp(i\omega_e t)$ , mais celle-ci est instable. Une perturbation vers l'intérieur du cercle donne naissance à

une spirale qui convergent vers zéro. Une perturbation à l'extérieur du cercle conduit à une spirale tendant vers l'infini. Pour  $\mu > 0$ , les trajectoires sont des spirales s'écartant de 0 et convergeant vers l'infini.

## 4 Formes normales et catastrophes

Les systèmes dynamiques  $\dot{x} = \mu + \alpha x^2$  et  $\dot{x} = \mu x + \alpha x^3$  avec  $x \in \mathbb{R}$  ou  $\dot{z} = (\mu + i\omega) z + (\alpha + i\beta) |z|^2 z$  avec  $z \in \mathcal{C}$ , décrivent les trois bifurcations génériques de l'équilibre au sens qui a été défini dans l'introduction. Les bifurcations noeud-col et fourche correspondent à des instabilités stationnaires tandis que la bifurcation de Hopf correspond à une instabilité oscillatoire. Plusieurs remarques peuvent être effectuées pour compléter l'étude de ces bifurcations.

### 4.1 Bifurcations imparfaites

Notons tout d'abord que la notion de généricité est relative à la classe de systèmes dynamiques accessibles en parcourant l'espace de contrôle. Pour la bifurcation fourche, on a supposé que le système était invariant par symétrie  $\underline{S}$  pour toutes les valeurs de l'espace de contrôle. Cette situation se rencontre souvent dans la nature où les symétries sont nombreuses. C'est justement la brisure de ces symétries (un équilibre bifurqué n'est plus symétrique mais le système dynamique lui-même reste symétrique) qui donne lieu à des bifurcations fourches. Les mathématiciens pourraient cependant prétendre que la bifurcation fourche n'est pas générique dans un espace de contrôle où l'on s'autorise à ce que le système dynamique lui-même ne soit plus symétrique. C'est le cas par exemple du système dynamique  $\dot{x} = \mu x + \alpha x^3 + \epsilon$ . Dans ce cas symétrie  $x \rightarrow -x$  n'est plus une symétrie du système dès que  $\epsilon$  est différent de zéro. On peut alors tracer des diagrammes de bifurcations dans le plan  $(\mu, x)$  pour  $\epsilon$  petit, et observer que la bifurcation fourche dégénère en une bifurcation noeud-col, proche d'une branche stable (cas super-critique) ou instable (cas sous-critique). On parle alors de bifurcation imparfaite.

### 4.2 Exposants critiques

Pour les trois bifurcations, l'amplitude des états bifurqués croît comme la racine carrée de l'écart au seuil. La théorie des formes normale, qui ramène les bifurcations génériques de l'équilibre à l'un de ces trois modèles, montre que cet exposant critique 1/2 est universel, c'est-à-dire indépendant du système dynamique étudié. Ce résultat est important lorsque l'on veut déterminer

expérimentalement un seuil de bifurcation à partir de la mesure des amplitudes de l'état bifurqué (cas supercritique).

Un autre exposant critique universel concerne les temps caractéristiques de convergence vers un équilibre dans le cas stable ou de croissance exponentielle à partir de l'équilibre dans le cas instable. Ces temps varient comme l'inverse de l'écart au seuil, faisant ainsi apparaître l'exposant critique  $-1$ . La détermination de ce temps en fonction d'un paramètre de contrôle permet de mesurer expérimentalement un seuil de bifurcation, même dans le cas sous-critique.

### 4.3 Bifurcations sous-critiques et hysteresis

La théorie des formes normales indique que le comportement des trois systèmes dynamiques considérés pour décrire les bifurcations noeud-col, fourche et de Hopf, est universel dans le voisinage des équilibres obtenus pour des systèmes dynamiques quelconques et pour des valeurs des paramètres proches du seuil. Les trajectoires qui tendent vers l'infini pour les formes normales peuvent converger vers d'autres équilibres ou régimes pour le système dynamique que l'on souhaite étudier. Cette situation se rencontre en particulier pour les bifurcations fourche ou de Hopf sous-critiques, pour lesquelles il n'existe pas de nouvel équilibre une fois l'équilibre initial déstabilisé.

On peut donner des exemples de telles situations à l'aide de systèmes dynamiques simples dont l'universalité n'est pas comparable à celle des trois formes normales que l'on a étudié. Considérons par exemple le système dynamique réel

$$\dot{x} = \mu x + \alpha x^3 + \gamma x^5 \quad (14)$$

avec  $x \in \mathbb{R}$  et le système dynamique complexe

$$\dot{z} = (\mu + i\omega) z + (\alpha + i\beta) |z|^2 z + (\gamma + i\delta) |z|^4 z \quad (15)$$

avec  $z \in \mathcal{C}$ . Dans le cas sous-critique  $\alpha > 0$  on observe un phénomène d'hysteresis. Lorsque  $\mu$  devient positif, une petite perturbation de l'équilibre 0 devenu instable s'amplifie pour converger vers un nouveau régime (équilibre ou cycle limite) d'amplitude finie dès le seuil (à condition que  $\gamma$  soit négatif). Ce nouveau régime stable persiste lorsque l'on diminue le paramètre de contrôle  $\mu$ , même en-deçà du seuil de la bifurcation. En continuant à diminuer  $\mu$ , le régime subit une bifurcation saddle-node (d'équilibres ou de cycles) et le système retombe vers l'équilibre stable 0. On a ainsi décrit un cycle d'hysteresis et il existe une gamme de valeurs du paramètre  $\mu$  pour laquelle deux régimes stables coexistent. Dans ce cas la position de la condition initiale dans l'un ou l'autre des bassins d'attraction des deux régimes conditionne l'état asymptotique du système.

#### 4.4 Théorème des fonctions implicites et catastrophes

La recherche des équilibres d'un système dynamique  $\dot{x} = f(x) = F(\underline{\mu}; x)$  conduit la résolution de l'équation implicite  $F(\underline{\mu}; x_e) = 0$ . Le théorème des fonctions implicite indique que l'on peut prolonger une courbe solution  $x_e(\mu)$  tant que  $\frac{\partial F}{\partial x}(\underline{\mu}; x_e) = f'(x_e) \neq 0$ . Les valeurs critiques  $\underline{\mu}_c$  telles que  $\frac{\partial F}{\partial x}(\underline{\mu}; x_e) = f'(x_e) = 0$  correspondent à des bifurcations où le nombre d'équilibre change. L'analyse de stabilité de l'équilibre  $x_e$  du système dynamique  $\dot{x} = f(x)$  faisant intervenir le signe de  $f'(x_e)$ , il est donc normal qu'un changement de stabilité soit accompagné d'un changement dans le nombre d'équilibres. C'est le cas de la bifurcation noeud-col et de la bifurcation fourche. Dans le cas de la bifurcation de Hopf, le théorème des fonctions implicites n'est pas violé sur la recherche des équilibres  $z = x + iy$ . Il l'est pour la recherche équilibres pour le module  $\rho$  en posant  $z = \rho \exp(i\theta)$ .

L'étude systématique des cas de violation du théorème des fonctions implicites et de leur voisinage dans l'espace de contrôle fait l'objet de la théorie des catastrophes. La catastrophe la plus simple est la pli, représenté par sa forme normale  $F(\mu; x_e) = \mu + \alpha x_e^2$ . En variant un seul paramètre, on passe de zéro à deux solutions. C'est ce qui se passe pour les équilibres de la bifurcation noeud-col. Par rapport à l'étude des catastrophes, qui ne s'intéresse qu'aux équilibres, l'analyse dynamique apporte des informations sur la stabilité de ces équilibres.

#### 4.5 Catastrophes de codimension 2 : la fronce

Il est intéressant ici d'étudier, à titre d'exemple, un système dynamique faisant apparaître la catastrophe de dimension 2 qu'est la fronce. Une fronce est l'intersection de deux plis dans l'espace de contrôle. Nous considérons donc le système dynamique

$$\dot{x} = F(p, q; x) = f(x) = -q + px - x^3 \quad (16)$$

dont l'espace de contrôle est l'ensemble des couples  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ . Considérons tout d'abord des chemins dans l'espace de contrôle où  $p$  est maintenu constant et où  $q$  décrit l'espace réel. Si  $p < 0$ , il n'existe qu'un seul équilibre comme le montre le tracé de la courbe  $f(x) = -q + px - x^3$ . Cet équilibre est alors stable car la dérivée  $f'(x) = p - 3x^2$  est négative. Si  $p > 0$ , le tracé de la courbe  $f(x)$  fait apparaître deux extrema égaux à  $-q \pm 2(p/3)^{3/2}$ . Si  $|q| < 2(p/3)^{3/2}$ , c'est-à-dire  $q^2 < 4p^3/27$ , il existe trois équilibres, un qui est instable entouré de deux qui sont stables. Dans ce cas, le diagramme de bifurcation ( $p$  fixe,  $q$  variable) fait apparaître deux bifurcations noeud-col pour les valeurs critiques  $q = 2(p/3)^{3/2}$  et  $q = -2(p/3)^{3/2}$ . On note aussi un phénomène d'hysteresis :

en suivant un équilibre lorsque  $q$  varie, le système bascule brutalement vers l'autre équilibre lorsque le seuil de la bifurcation noeud-col est dépassé. En faisant alors varier le paramètres dans l'autre sens, on retourne à l'équilibre stable initial mais en dépassant l'autre seuil de bifurcation. Ainsi, pour une valeur de  $q$  située entre les deux seuils, on peut atteindre deux équilibres stables selon la condition initiale ou le chemin suivi dans l'espace de contrôle.

On résume cette analyse en traçant la courbe  $27q^2 - 4p^3$  dans l'espace de contrôle  $(p, q)$ . Cette courbe fait apparaître un point de rebroussement au voisinage de  $(p, q) = \underline{0}$ . On peut aussi tracer la courbe  $F(p, q, x_e) = 0$  dans l'espace  $(p, q, x_e)$ . Cette visualisation, que l'on peut essayer de matérialiser en déformant convenablement une feuille de papier, donne le nom de fonce à cette catastrophe de codimension 2. Notant pas ailleurs que des chemins  $q$  fixé et  $p$  variable produisent une bifurcation fourche dans le cas particulier  $q = 0$  et des bifurcations fourches imparfaites dans le voisinage de cette valeur.

La théorie des catastrophes combinée à la théorie des formes normales montre que cette description qualitative, ainsi que l'exposant critique  $3/2$  du point de rebroussement dans l'espace de contrôle, sont des caractéristiques universelles des systèmes pour lesquels deux bifurcations noeud-cols se coupent dans l'espace de contrôle. La portée de ce résultat explique certainement le succès de la théorie des catastrophes dans l'étude des systèmes physiques.

## Conclusion

Nous avons étudié en détail trois équations modèles des bifurcations noeud-col ( $\dot{x} = \mu + \alpha x^2$ ), fourche ( $\dot{x} = \mu x + \alpha x^2$ ) et de Hopf ( $\dot{z} = (\mu + i\omega)z + (\alpha + i\beta)|z|^2 z$ ).

Les bifurcations noeud-col et de Hopf sont génériques dans l'ensemble des systèmes dynamiques quelconques (sans symétrie) de  $\mathbb{R}^n$  dès lors que l'on s'intéresse à la stabilité d'un équilibre en faisant varier un paramètre. Ceci signifie que, sur une surface de codimension un dans l'espace des paramètres de contrôles, un équilibre stable se déstabilisera en suivant le diagramme de bifurcation de l'une des ces deux bifurcations. Pour déterminer laquelle, il faut linéariser le système dynamique autour de l'équilibre et analyser les valeurs propres de la matrice jacobienne ainsi obtenu. En faisant varier un paramètre de contrôle, l'équilibre se déstabilise par passage d'une valeur propre à travers l'axe des imaginaires purs. S'il s'agit d'une valeur propres réelles, on est en présence d'une bifurcation noeud-col. S'il s'agit d'une paire de valeurs propres complexes conjuguées, on est en présence d'une bifurcation de Hopf.

La bifurcation fourche est générique dans l'ensemble des systèmes dynamiques

invariant par une symétrie  $\underline{S}$  de  $\mathbb{R}^n$  lorsque l'on suit un équilibre lui-même invariant par cette symétrie. Cette bifurcation correspond alors à une brisure de symétrie et correspond au changement de signe d'une valeur propre réelle.

Les trois équations modèles décrivant les trois bifurcations générique de l'équilibre sont en fait l'ordre dominant d'un développement asymptotique au voisinage des seuils de changement de stabilité. On dit que ces équations sont les "formes normales" des ces trois bifurcations. On montre alors que la topologie des trajectoires du système complet au voisinage des équilibres est la même que celle des formes normales.