CORRIGÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

Corrigé 0.1 Obstacle immergé et roll-waves

Modèle d'onde cinématique

1)La loi de conservation de la masse s'écrit $\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{5}{3}U(h)\,\frac{\partial h}{\partial x}=0$ où U dépend de h comme indiqué. **2)**L'équation linéarisé autour de h_n s'écrit $\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t}+\frac{5}{3}\,U_n\,\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x}=0$, avec $U_n=U(h_n)$. **3)**L'équation linéaire étant invariante par translation dans l'espace et le temps, on peut chercher des solutions sous forme d'exponentielles. On anticipe qu'il n'y aura ni amplification ni amortissement des ondes (le calcul le confirmerait). **4)**La relation de dispersion $\omega=\Omega(k_1)=\frac{5}{3}U_n\,k_1$ n'est définie que pour $k_1\geq 0$ avec la convention $\omega\geq 0$. Son tracé est donc formé d'une demi-droite. **5)**On a, $c_\varphi=c_g=\frac{5}{3}\,U_n$. Le milieu n'est pas dispersif. **6)**Seule l'onde vérifiant $k_1=k_0$ avec $k_0=\frac{3}{5}\omega_0/U_n$ est émise dans le sillage lointain. Ce sillage est uniquement observé dans la région $x>0$ dans la mesure où la vitesse de groupe est positive. **7)**Ces ondes, situées en aval de l'écoulement, se propagent à une vitesse $5\,U_n/3$ qui est donc plus grande que la vitesse U_n de l'écoulement moyen.

Modèle de Saint-Venant

8)Les équations linéarisées s'écrivent $\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t}+U_n\,\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial x}+g'\,\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x}=0$ et $\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t}+h_n\,\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial x}+U_n\,\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x}=0$. **9)**Les équations sont invariantes par translation en espace et en temps. **10)**Le système s'écrit $\begin{pmatrix}-i\,\omega+U_n\,i\,k_1 & g'\,i\,k_1\\ i\,k_1\,h_n & -i\,\omega+U_n\,i\,k_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\underline{0}$. En annulant le déterminant, on obtient la relation de dispersion $(\omega-k_1\,U_n)^2=g'\,h_n\,k_1$. Avec la convention $\omega\geq 0$ et en posant $c_n=\sqrt{g'\,h_n}$, on obtient les relations $\omega=(U_n-c_n)k_1$ et $\omega=(U_n+c_n)k_1$ respectivement définies pour $k_1\leq 0$ et $k_1\geq 0$ lorsque $F<1$ et pour $k_1\geq 0$ seulement pour $F>1$. Les tracés de ces relations de dispersion sont des demi-droites. **11)**Pour $F<1$, on observe une onde de vecteur d'onde $k_1=\omega_0/(U_n+c_n)$ se propageant vers la droite à une vitesse $c_\varphi=c_g=U_n+c_n$, et une onde de vecteur d'onde $k_1=\omega_0/(U_n-c_n)$ qui remonte le courant à la vitesse $U_n-c_n<0$. Pour $F>1$, ces deux ondes se propagent vers l'aval.

Modèle des "roll-waves"

12) Le système s'écrit $\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t}+U_n\,\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial x}+g'\,\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x}+D\,h_n^{-(1+\beta)}\,U_n-\frac{1+\beta}{2}\,D\,h_n^{-(2+\beta)}\,U_n^2=$

0 et $\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t} + h_n \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial x} + U_n \frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x} = 0$. **13)**L'invariance par translations et le souhait de borner les solutions à l'infin conduit à cette forme de solutions élementaires. **14)**En posant $x = h_n\, x_*$, $t = \frac{h_n}{U_n}\, t_*$, $U(x,t) = U_n\, U_*(x_*, t_*)$ et $h(x,t) = h_n\, h_*(x_*, t_*)$, on obtient le système $\frac{\partial U_*}{\partial t_*} + U_* \frac{\partial U_*}{\partial x_*} = -\frac{1}{F^2} \frac{\partial h_*}{\partial x_*} + \frac{1}{2}\, d \left(1 - \frac{U_*^2}{h_*^{1+\beta}}\right)$ et $\frac{\partial h_*}{\partial t_*} + \frac{\partial}{\partial x_*}(U_*\, h_*) = 0$. La relation de dispersion généralisée s'obtient en annulant le déterminant du sytème linéarisé, ce qui s'écrit

$$\begin{vmatrix} s_* + i\, k_* + d & \frac{i\, k_*}{F^2} - \frac{1+\beta}{2} d \\ i\, k_* & s_* + i\, k_* \end{vmatrix} = (s_* + i\, k_* + d)(s_* + i\, k_*) - i\, k_* \left(\frac{i\, k_*}{F^2} - \frac{1+\beta}{2} d \right) = 0\ .$$

Cette relation de dispersion s'écrit $(S + i\, K + 1)(S + i\, K) + \frac{1}{F^2} K^2 + \frac{1+\beta}{2}\, i\, K = 0$ en posant $S = s/d$ et $K = k_1/d$. **15)**Au seuil de l'instabilité, on a $S = -i\, \Omega$, ce qui entraîne $(\Omega - K^2)^2 = K^2/F^2$ et $\Omega - K = \frac{1+\beta}{2} K$ en séparant les parties réelles et imaginaires de l'équation. On en déduit que le seuil est obtenu pour $F = \frac{2}{1+\beta}$. Pour un seuil à $F = 3/2$, on obtient $\beta = 1/3$. On retrouve la paramétrisation de Strickler. **16)**Au seuil, la relation de dispersion s'écrit $\Omega = \frac{3+\beta}{2} K$, ce qui conduit, dans le cas $\beta = 1/3$, à $\Omega = \frac{5}{3} K$. En repassant aux unités dimensionnelles, on obtient la relation de dispersion $\omega = \frac{5}{3} U_n\, k_1$ au seuil de l'instabilité. L'onde marginale émise par un obstacle est observée uniquement en aval de l'obstacle et a pour longueur d'onde $k_1 = \frac{3}{5} \omega_0 / U_n$. Sa vitesse et de phase et sa vitesse de groupe sont égale à $\frac{5}{3} U_n$. L'autre onde émise par l'obstacle est amortie.