

# COURS ÉCRIT

1	Modèles prototype 1D . . . . .	1
2	L'instabilité "roll waves" d'un écoulement incliné . . . . .	5
3	Instabilité de Kelvin Helmholtz . . . . .	10
4	Stabilité des écoulements parallèles . . . . .	14

## Introduction

On considère ici les modèles d'écoulement les plus simples permettant de mettre en évidence la notion d'instabilité de cisaillement. Dans un premier temps, on présente le concept de linéarisation autour d'une solution stationnaire et de croissance exponentielle d'une petite perturbation sur des exemples d'équations aux dérivées partielles 1D très simples. Le premier exemple d'écoulement physique présenté est alors le modèle des équations de Saint Venant qui décrit la dynamique des ondes de surface d'une couche fluide peu profonde coulant sur un plan incliné. Le deuxième exemple traitable de manière analytique est celui de l'instabilité de Kelvin Helmholtz qui décrit le cisaillement de deux couches fluides irrotationnelles, la vorticité est concentrée à l'interface. Enfin, le problème au valeurs propres permettant de déterminer la stabilité des écoulements parallèles est abordé à travers la dérivation de l'équation d'Orr-Sommerfeld.

## 1 Modèles prototype 1D

Pour introduire les notions d'instabilité, de relations de dispersion ou de modes propres de la manière la plus simple possible, on présente ici des modèles basés sur des équations aux dérivées partielles unidimensionnelles (1D). Il est fait ici abstraction de l'éventuelle signification physique des solu-

tions, bien qu'il serait possible d'expliciter des systèmes dont la dynamique se laisse décrire par ces modèles.

### 1.1 Modèle linéaire

Pour introduire le concept d'instabilité, on considère le modèle linéaire 1D suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \mu_0 u + \mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} . \quad (1)$$

En se plaçant dans la cadre d'un domaine infini, on cherche des solutions complexes de la forme

$$u(x, t) = A e^{i k_1 x + s t} = A e^{i k_1 x} e^{\sigma t - i \omega t} \quad (2)$$

avec  $A \in \mathcal{C}$ ,  $k_1 \in \mathbb{R}$  et  $s = \sigma - i \omega \in \mathcal{C}$ . La forme de ces solutions est justifiée par le fait que l'équation aux dérivées partielles considérée est invariante par translations d'espace et de temps. On pourrait considérer des solutions plus générale de la forme  $u(x, t) = a \exp(\gamma x + i k_1 x) \exp(\sigma t - i \omega t)$ , pour prendre en compte une croissance spatiale, mais on se restreint ici au cas où les solutions sont bornées à l'infini. Dans la mesure où le modèle est linéaire, les solutions générales sont obtenues en sommant les solutions élémentaires considérées. En particulier, les solutions réelles peuvent s'obtenir en prenant la partie réelle des solutions complexes. Pour pouvoir étendre les notations aux cas 2D ou 3D, on dira que  $k_1 \in \mathbb{R}$  est le "vecteur d'onde" et que sa norme (valeur absolue)  $k = |k_1|$  est le "nombre d'onde".

En reportant la forme des solutions recherchées dans l'équation, on voit que l'on obtient des solutions non triviales ( $A \neq 0$ ) à condition que les relations de dispersions généralisées suivantes soient vérifiées :

$$\sigma = \Sigma(k_1) = \mu_0 - \mu_2 k_1^2 + \mu_4 k_1^4 \quad \text{et} \quad \omega = \Omega(k_1) = \alpha_1 k_1 - \alpha_3 k_1^3 . \quad (3)$$

Un autre point de vue consiste à écrire le modèle sous la forme  $\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L} u$ , où  $\mathcal{L} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$  est l'opérateur différentiel qui contient les dérivées spatiales et  $P$  est le polynôme défini par  $P(\xi) = \mu_0 - \alpha_1 \xi + \mu_2 \xi^2 - \alpha_3 \xi^3 + \mu_4 \xi^4$ . Les fonctions  $A e^{i k_1 x}$  sont les "modes propres" de l'opérateur  $\mathcal{L}$ . On peut écrire

$$\mathcal{L} e^{i k_1 x} = P(i k_1) e^{i k_1 x} = [\Sigma(k_1) - i \Omega(k_1)] e^{i k_1 x} . \quad (4)$$

La deuxième relation de l'équation (3) (figure 2.b) est la relation de dispersion de l'équation de Korteweg de Vries linéaire que l'on obtient dans le cas où les coefficients  $\mu_i$  du modèle sont nuls.

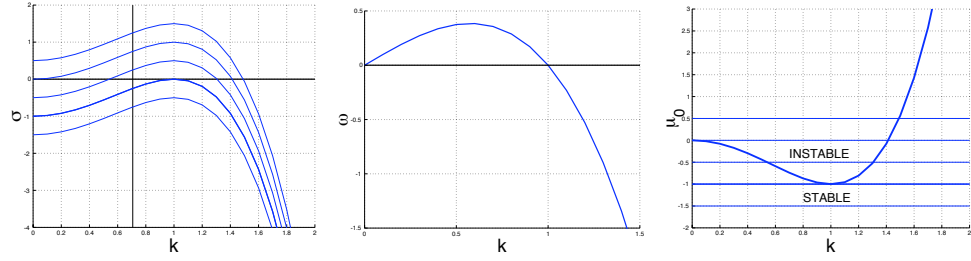


Figure 1: *Dispersion et stabilité du modèle prototype dans le cas  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_3 = 1$ ,  $\mu_2 = -2$  et  $\mu_4 = -1$ . a) Taux de croissance  $\sigma = \Sigma(k_1)$  pour  $\mu_0 \in \{-1.5, -1.0, -0.5, 0.0, 0.5\}$ . b) Relation de dispersion  $\omega = \Omega(k_1)$ . c) Seuil d'instabilité  $R_c(k) = -1$  dans la plan  $(k, \mu_0)$ .*

La première relation de l'équation (3) (figure 2.a) permet de déterminer si les solutions du modèles sont amplifiées ( $\sigma > 0$ ) ou amorties ( $\sigma < 0$ ). On voit que l'on doit supposer  $\mu_4 \leq 0$  pour que les modes de grand nombre d'onde  $k$  (petites périodes spatiales) soient amortis. Dans le cas contraire, le modèle est non seulement "non physique", mais aussi mal posé sur le plan mathématique. Si  $\mu_4 \leq 0$ , le maximum de  $\Sigma(k_1)$  est atteint pour  $k_1 = \frac{\mu_2}{2\mu_4}$  et vaut  $\mu_0 - \frac{\mu_2^2}{4\mu_4}$ . On voit alors que lorsque le nombre sans dimension  $R = \frac{4\mu_0\mu_4}{\mu_2^2}$  est inférieur à la valeur critique  $R_c = -1$ , tous les modes sont stables. Lorsque  $R$  est supérieur a cette valeur critique, les modes sont instables pour un intervalle finie de nombre d'onde  $k_1$ , le mode le plus instable correspond à la valeur critique  $k_c \sqrt{-\frac{\mu_4}{\mu_2}}$ .

## 1.2 Linéarisation autour d'un équilibre

On considère le modèle non linéaire 1D suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu u - \gamma u^3 + \mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (5)$$

avec  $u(x, t) \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\mu_2 > 0$  et  $\mu_4 < 0$ . Pour  $\mu > 0$ , on remarque l'existence des deux solutions stationnaires symétriques  $u_+ = u_0$  et  $u_- = -u_0$  avec  $u_0 = \sqrt{\mu/\gamma}$ . On s'intéresse à la stabilité temporelle de équilibre  $u_+ = u_0$  au regard des petites perturbations. Pour cela, on pose

$$u(x, t) = u_0 + \tilde{u}(x, t) \quad (6)$$

et l'on s'intéresse à l'évolution des perturbations  $\tilde{u}(x, t)$  que l'on peut choisir petites à un instant initial donné. En reportant dans l'équation du modèle

on obtient :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \left( \mu - 3\gamma u_0^2 \right) \tilde{u} + \mu_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^4} - \gamma \left[ 3 u_0 \tilde{u}^2 + \tilde{u}^3 \right]. \quad (7)$$

Tant que la perturbation  $\tilde{u}(x, t)$  reste petite, on peut négliger les terme “non linéaires”  $\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$  et  $[3 u_0 \tilde{u}^2 + \tilde{u}^3]$  devant les termes linéaires. En posant  $\mu_0 = \mu - 3\gamma u_0^2 = -2\mu$ , le système “linéarisé autour de l’équilibre  $u_0$ ” s’écrit donc

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \mu_0 \tilde{u} + \mu_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \mu_4 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^4}. \quad (8)$$

On retrouve le modèle linéaire étudié dans le paragraphe précédent à condition de poser  $\alpha_1 = u_0$  et  $\alpha_3 = 0$ .

### 1.3 Calcul de stabilité dans le cas général

Pour généraliser le concept de stabilité temporelle d’un équilibre au cas 3D, on considère le modèle général

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = \underline{\mathcal{F}}(\underline{U}) \quad (9)$$

où  $\underline{U}(\underline{x}, t) = (U_1, U_2, \dots, U_n) \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur dans un espace de dimension  $n$ ,  $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  est le vecteur des coordonnées spatiales et  $\underline{\mathcal{F}}$  est un opérateur non linéaire faisant intervenir les dérivées spatiales  $\left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$  des composantes de  $\underline{U}$ .

On suppose que l’état constant  $\underline{U}_0$  est un équilibre du modèle, c’est-à-dire qu’il vérifie  $\underline{\mathcal{F}}(\underline{U}_0) = \underline{0}$ . On pose alors  $\underline{U}(\underline{x}, t) = \underline{U}_0 + \tilde{\underline{U}}(\underline{x}, t)$  et l’on suppose que  $\tilde{\underline{U}}$  est une perturbation initialement petite. En reportant dans le modèle on obtient

$$\frac{\partial \tilde{\underline{U}}}{\partial t} = \underline{L} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \tilde{\underline{U}} + O(\|\tilde{\underline{U}}\|^2), \quad (10)$$

où  $\underline{L}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  est une matrice  $n \times n$  dont les composantes  $L_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  sont des polynômes et  $O(\|\tilde{\underline{U}}\|^2)$  est un terme négligeable tant que la perturbation est petite.

On cherche alors des solutions du système linéarisé  $\frac{\partial \tilde{\underline{U}}}{\partial t} = \underline{L} \tilde{\underline{U}}$  sous la forme

$$\tilde{\underline{U}}(\underline{x}, t) = \underline{A} e^{i \underline{k} \cdot \underline{x} + s t} \quad (11)$$

où  $\underline{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3$  est appelé le “vecteur d’ondes” et  $\underline{A}$  est une amplitude complexe constante. On obtient alors

$$s \underline{A} = \underline{L}(i k_1, i k_2, i k_3) \underline{A}. \quad (12)$$

Les solutions non nulles sont obtenues en choisissant  $s$ ,  $\underline{k}$  et  $\underline{A}$  de telle sorte que  $\underline{A}$  soit un vecteur propre de la matrice  $\underline{L}(ik_1, ik_2, ik_3)$ . La valeur propre est alors  $s$  et on dit que la solution ainsi trouvée est un "mode propre".

Dans le cas où  $\underline{L}(ik_1, ik_2, ik_3)$  est une matrice  $(n \times n)$  diagonalisable, cette recherche de valeurs propres et vecteurs propres conduit à  $n$  relations de dispersion généralisées de la forme

$$\sigma_i = \Sigma_i(\underline{k}) \quad \text{et} \quad \omega_i = \Omega_i(\underline{k}) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n. \quad (13)$$

Les vecteurs propres  $\underline{A}_i$  associés, solutions de  $\underline{L} \underline{A}_i = s_i \underline{A}_i$  sont les amplitudes complexes des modes propres  $\underline{A}_i \exp(i \underline{k} \cdot \underline{x})$  qui engendrent des solutions dont le comportement temporel est donné par la fonction  $e^{s_i t} = e^{\sigma_i t - i \omega_i t}$ .

On en déduit que  $\sigma_i = \Sigma_i(\underline{k})$  est négatif pour les  $i = 1, \dots, n$  et tous les vecteurs d'ondes  $\underline{k}$  considérés, le système linéaire est stable et, par conséquent, l'équilibre  $\underline{U}_0$  autour duquel le modèle a été linéarisé. En revanche, il suffit qu'il existe une valeur propre  $s_i$  dont la partie réelle  $\sigma_i$  est positive pour une bande, même petite, de vecteurs d'ondes  $\underline{k}$ , pour que l'équilibre considéré soit instable.

## 2 L'instabilité "roll waves" d'un écoulement incliné

L'écoulement d'une lame d'eau dont l'épaisseur est faible devant l'échelle horizontale des phénomènes que l'on observe est modélisée par les équations de Saint Venant (shallow water). Dans le cas d'un écoulement gravitaire sur un plan incliné, on observe une instabilité de la surface libre lorsque la pente dépasse un seuil critique. Cette instabilité porte le nom de "roll waves" du nom des structure en forme de rouleaux qui se forment à la surface libre. Nous limitons ici l'étude au calcul de seuil de déclenchement de l'instabilité dans le cas le plus simple.

### 2.1 Modèle des équations de Saint Venant

On considère un écoulement à surface libre sur un plan incliné faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. On note  $g$  la gravité.

Dans le cadre de "l'approximation des eaux peu profondes", le modèle décrivant l'écoulement est celui des équations de Saint Venant qui s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} &= -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g I - \frac{1}{2} C_f \frac{U |U|}{h} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U h) &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

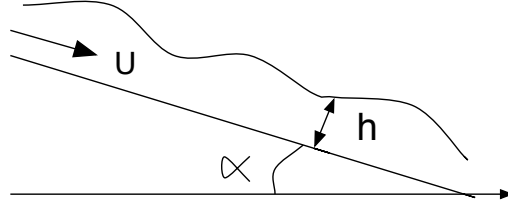


Figure 2: Écoulement à surface libre d'une lame d'eau d'épaisseur  $h$  et de vitesse moyenne  $U$  sur un plan incliné.

où  $U(x, t)$  est la vitesse moyenne de la couche fluide,  $h(x, t)$  sa hauteur,  $g' = g \cos \alpha$  la projection de la gravité sur la normale au fond et  $I = \sin \alpha$  le sinus de l'angle d'inclinaison, proche de la pente lorsque celle-ci est petite. Le nombre sans dimension  $C_f$  modélise le frottement du fond sur la couche. On suppose ici que  $C_f$  est constant.

Les solutions stationnaires  $(U_n, h_n)$  de ce modèle sont solutions de l'équation

$$U_n = \sqrt{\frac{2g'}{C_f}} \sqrt{I} h_n^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Il existe donc une famille à un paramètre de solutions stationnaires que l'on appelle "écoulements normaux" en hydraulique.

On cherche à déterminer la stabilité de ces équilibres. On pose alors

$$U(x, t) = U_n + \tilde{U}(x, t) \quad \text{et} \quad h(x, t) = h_n + \tilde{h}(x, t). \quad (16)$$

En reportant dans le modèle est en négligeant les termes d'ordre 2, on obtient le système linéarisé suivant

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + U_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} &= -g' \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + C_f \left( \frac{U_n}{h_n} \tilde{U} - \frac{U_n^2}{2 h_n^2} \tilde{h} \right) \\ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + U_n \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + h_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

On cherche alors des solutions sous la forme

$$(\tilde{U}, \tilde{h}) = (A, B) e^{i k_1 x + s t} \quad (18)$$

où  $A$  et  $B$  sont de amplitudes complexes, et  $s = \sigma - i \omega \in \mathcal{C}$ . En reportant dans les équations, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} s + i k_1 U_n + C_f \frac{U_n}{h_n} & g' i k_1 - C_f \frac{U_n^2}{2 h_n^2} \\ i k_1 h_n & s + i k_1 U_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

On obtient des solutions non triviales à condition que le déterminant de la matrice  $2 \times 2$  soit nul, ce qui conduit à la relation de dispersion généralisée suivante :

$$\left( s + i k_1 U_n + C_f \frac{U_n}{h_n} \right) (s + i k_1 U_n) - i k_1 g' h_n \left( g' i k_1 - C_f \frac{U_n^2}{2 h_n^2} \right) = 0 . \quad (20)$$

La stabilité des équilibres  $(U_n, h_n)$  s'obtient en trouvant les racines complexes  $s_1$  et  $s_2$  de ce polynôme de degré deux pour chaque valeur de  $k_1$ , dont on déduit les relations de dispersion généralisées

$$\sigma_1 = \Sigma_1(k_1), \quad \omega_1 = \Omega_1(k_1) \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \Sigma_2(k_1), \quad \omega_2 = \Omega_2(k_1) . \quad (21)$$

A priori, la stabilité dépend des quatre paramètres  $(h_n, g', I, C_f)$ , la vitesse  $U_n$  y étant reliée. L'analyse dimensionnelle permet de réduire la dépendance à deux paramètres sans dimensions, dans la mesure où les unités de longueur et de temps retirent deux paramètres. Nous allons retrouver ce résultat dans le paragraphe suivant en écrivant le modèle sous une forme adimensionnée. Nous allons ensuite montrer que la structure particulière des équations fait qu'il n'y a en fait qu'un seul nombre sans dimension à considérer.

## 2.2 Équations adimensionnées

Pour étudier la stabilité d'un écoulement stationnaire  $(U_n, h_n)$  on choisit d'adimensionner les grandeurs de la manière suivante

$$\begin{aligned} x &= h_n x_*, & t &= \frac{h_n}{U_n} t_* \\ U(x, t) &= U_n U_*(x_*, t_*), & h(x, t) &= h_n h_*(x_*, t_*), \end{aligned} \quad (22)$$

où  $(x_*, t_*, U_*, h_*)$  sont des grandeurs sans dimensions. En reportant ce changement de variables dans les équations on obtient le système adimensionné suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_*}{\partial t_*} + U_* \frac{\partial U_*}{\partial x_*} &= -\frac{1}{F^2} \frac{\partial h_*}{\partial x_*} + \frac{1}{2} C_f \left( 1 - \frac{U_*^2}{h_*} \right) \\ \frac{\partial h_*}{\partial t_*} + \frac{\partial}{\partial x_*} (U_* h_*) &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

où  $F = \frac{U_n}{\sqrt{g' h_n}} = \sqrt{\frac{2I}{C_f}}$  est le "nombre de Froude". Pour ces équations adimensionnées, l'équilibre considéré est  $(U_*, h_*) = (1, 1)$ .

On étudie sa stabilité en posant

$$U_*(x_*, t_*) = 1 + \tilde{U}_*(x_*, t_*) \quad \text{et} \quad h_*(x_*, t_*) = 1 + \tilde{h}_*(x_*, t_*) \quad (24)$$

et en cherchant l'évolution des perturbations sous la forme

$$(\tilde{U}_*, \tilde{h}_*) = (A_*, B_*) e^{i k_* x_* + s_* t_*} . \quad (25)$$

La stabilité de l'équilibre  $(U_*, h_*) = (1, 1)$  s'obtient en annulant le déterminant de l'opérateur linéarisé, ce qui s'écrit

$$\begin{vmatrix} s_* + i k_* + C_f & \frac{1}{F^2} i k_* - \frac{1}{2} C_f \\ i k_* & s_* + i k_* \end{vmatrix} = \\ (s_* + i k_* + C_f)(s_* + i k_*) - i k_* \left( \frac{1}{F^2} i k_* - \frac{1}{2} C_f \right) = 0 . \quad (26)$$

On pose  $S = s_*/C_f$  et  $K = k_*/C_f$ . Avec ces notations, la relation de dispersion généralisée s'écrit

$$(S + i K + 1)(S + i K) + \frac{1}{F^2} K^2 + \frac{1}{2} i K = 0 . \quad (27)$$

On voit que le paramètre  $C_f$  ne joue aucun rôle dans la détermination du seuil d'instabilité.

### 2.3 Calcul de stabilité

La stabilité de l'équilibre ne dépend donc plus que du nombre de Froude  $F$ . En posant  $Y = S + i K$  pour simplifier la recherche des racines de cette équation du second degré, on se ramène à

$$Y^2 + Y + \frac{1}{F^2} K^2 + \frac{1}{2} i K = 0 . \quad (28)$$

Les solutions s'écrivent

$$Y_1(K) = \frac{1}{2} \left( -1 + \Delta^{\frac{1}{2}} \right) \quad \text{et} \quad Y_2(K) = \frac{1}{2} \left( -1 - \Delta^{\frac{1}{2}} \right) \\ \text{avec} \quad \Delta = \left( 1 - 2 i K - \frac{4}{F^2} K^2 \right) , \quad (29)$$

la convention utilisée pour prendre la racine du discriminant complexe  $\Delta \in \mathcal{C}$  étant indifférente dans la mesure où l'on s'intéresse aux deux solutions.

En posant  $S = \Sigma(K) - i \Omega(K) = -i K + Y(K)$ , on peut tracer sur la figure 5 les relations de dispersions généralisées  $\Sigma_-(K)$  et  $\Sigma_+(K)$  pour la partie réelle et  $\Omega_-(K)$  et  $\Omega_+(K)$  pour la partie imaginaire, en adoptant la convention  $\Sigma_-(K) < \Sigma_+(K)$ .

En effectuant des développements limités, on obtient les comportements asymptotiques suivants :

$$\text{Pour } K \rightarrow 0 : \quad \Sigma_+(K) \sim \frac{K^2}{4} (F^2 - 4) , \quad \Sigma_-(K) \sim -1 - \frac{K^2}{4} (F^2 - 4)$$



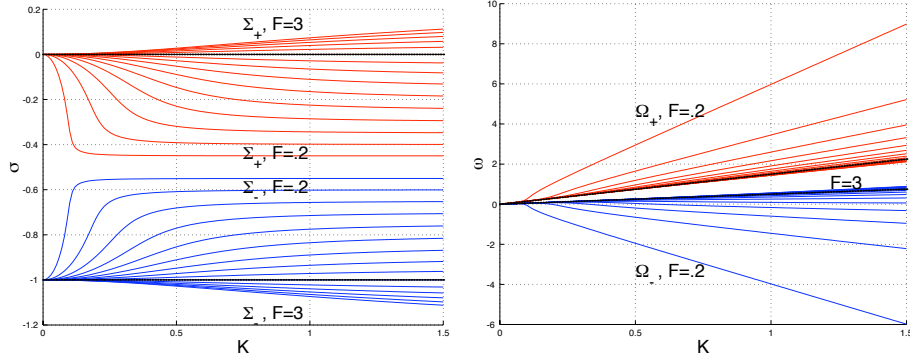


Figure 3: Relations de dispersion généralisées pour les nombres de Froude  $F = .2 : .2 : 3$ . a)  $\Sigma_+(K)$  et  $\Sigma_-(K)$ . b)  $\Omega_+(K)$  et  $\Omega_-(K)$ .

$$\Omega_+(K) \sim \frac{3}{2} K, \quad \Omega_-(K) \sim \frac{1}{2} K \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } K \rightarrow \infty : \quad \Sigma_+(K) &\rightarrow \frac{1}{4}(F-2), & \Sigma_-(K) &\rightarrow -1 - \frac{1}{4}(F-2) \\ \Omega_+(K) &\sim \left(1 + \frac{1}{F}\right) K, & \Omega_-(K) &\sim \left(1 - \frac{1}{F}\right) K \end{aligned} \quad (31)$$

Sur le tracé des courbes, on remarque que la courbe  $\Sigma_-(K)$  est toujours négative tandis que la courbe  $\Sigma_+(K)$  est négative pour les nombres petits et positive, au moins pour certaines valeurs de  $K$ , pour  $F$  assez grand. Pour le Froude critique  $F = F_c = 2$ , on remarque que les racines  $Y$  sont solutions de l'équation

$$Y^2 + Y + \frac{1}{4} K^2 + \frac{1}{2} i K = \left(Y + i \frac{1}{2} K\right) \left[Y + \left(1 - i \frac{1}{2} K\right)\right] = 0 \quad (32)$$

Pour  $F = 2$ , on a donc

$$\Sigma_+(K) = 0, \quad \Omega_+(K) = \frac{3}{2} K \quad \text{et} \quad \Sigma_-(K) = -1, \quad \Omega_-(K) = \frac{1}{2} K. \quad (33)$$

On montre alors que  $\Sigma_+(K) < 0$  pour  $F < 2$  et  $\Sigma_+(K) > 0$  pour  $F > 2$ . Le seuil d'instabilité est donc  $F = F_c = 2$ . Tous les modes deviennent instables au seuil. Au seuil, la vitesse de phase des ondes est  $C_+(K) = \Omega_+(K)/K = \frac{3}{2}$  et  $C_-(K) = \Omega_-(K)/K = \frac{1}{2}$ . En revenant aux grandeurs dimensionnelles, ces vitesses sont donc  $\frac{3}{2} U_n$  et  $\frac{1}{2} U_n$ . On remarque que ces ondes sont non dispersives (vitesse de phase  $\omega/k$  constante) au seuil  $F = F_c = 2$ , alors que les modes stables ou instables sont dispersifs (quoique seulement légèrement dès que  $k$  est suffisamment grand).



Figure 4: *Mise en évidence expérimentale de roll waves.*

Les modes instables que l'on voit apparaître pour  $F > F_c = 2$  sont des structures périodiques que l'on appelle "roll-waves". A priori, tous les modes de toutes les longueurs d'ondes deviennent simultanément instables pour  $F = 2$ , les modes de petites longueurs d'ondes ( $k$  grand) étant les plus instables. Cette situation n'est pas physique et il faut prendre en compte, dans un modèle plus complet, les effets de dissipation d'énergie à petite échelle. Un exemple de modélisation des petites échelles, souvent turbulentes, consiste à ajouter un terme en  $\nu_e \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$  dans le second membre de l'équation de conservation de la quantité de mouvement,  $\nu_e$  étant une viscosité turbulente que l'on peut, par exemple, supposer constante. La saturation de l'instabilité s'effectue par la formation de ressauts (chocs) dont l'épaisseur est contrôlée par la valeur de la viscosité. Ces considérations ne sont pas développées ici.

### 3 Instabilité de Kelvin Helmholtz

Lorsque deux couches fluides de vitesses et/ou de masses volumiques différentes sont mises en contact, on observe, pour certaines valeurs des paramètres, le développement d'une instabilité. Ce phénomène est appelé, de manière générique "instabilité de Kelvin Helmholtz". Plus spécifiquement, cette dénomination se rapporte à la situation idéalisée de l'interface de deux fluides parfaits individuellement homogènes.

#### 3.1 Équations d'Euler incompressible avec interface

On considère deux couches fluides semi-infinies séparées par une surface libre.

On suppose que les fluides sont parfaits et incompressibles et on note  $\rho_1$  et  $\rho_2$  les masses volumiques des fluides respectivement situés en bas et en haut. On suppose que les fluides sont parfaits, si bien que leur dynamique est modélisée par les équations d'Euler incompressibles

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U}_1 = 0 & \quad \text{et} & \quad \rho_1 \frac{d}{dt} \underline{U}_1 = -\operatorname{grad} p_1 - \rho_1 g \underline{e}_z \\ \operatorname{div} \underline{U}_2 = 0 & \quad \text{et} & \quad \rho_2 \frac{d}{dt} \underline{U}_2 = -\operatorname{grad} p_2 - \rho_2 g \underline{e}_z \end{aligned} \quad (34)$$

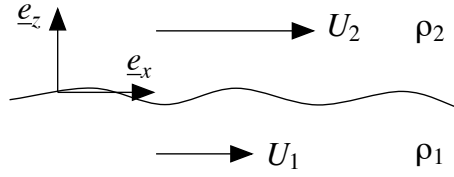


Figure 5: Couches fluides superposées de vitesses  $U$  et de masses volumiques  $\rho$  différentes.

où  $\underline{U}_1(\underline{x}, t) = (u_1, v_1, w_1)$  et  $\underline{U}_2(\underline{x}, t) = (u_2, v_2, w_2)$  sont les champs de vitesse et  $p_1(\underline{x}, t)$  et  $p_2(\underline{x}, t)$  les champs de pression. Le vecteur unitaire  $\underline{e}_z$  est vertical et  $g$  est l'intensité de la gravité. La notation  $\frac{d}{dt}$  désigne la dérivée particulière  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \underline{\text{grad}}$  pour le fluide du bas et  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \underline{\text{grad}}$  pour le fluide du haut.

On suppose que l'on a les conditions aux limites

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \underline{U}_1 = U_1 \underline{e}_x \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \underline{U}_2 = U_2 \underline{e}_x \quad (35)$$

où  $\underline{e}_x$  est un vecteur unitaire horizontal.

Les conditions aux limites à l'interface des deux fluides sont

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \underline{\text{grad}} \eta = w_1, \quad p_1 = p_2, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \underline{\text{grad}} \eta = w_2 \quad (36)$$

sur la surface libre d'équation  $F(\underline{x}, t) = z - \eta(x, y, t) = 0$ . L'élévation de la surface libre est donc  $\eta(x, y, t)$ . Les deux conditions cinématiques  $\frac{dF}{dt} = w_1 - \frac{d\eta}{dt} = w_2 - \frac{d\eta}{dt} = 0$  s'obtiennent en prenant la dérivée particulière de la fonction  $F(\underline{x}, t) = 0$ . La condition dynamique  $p_1 = p_2$  s'obtient en assurant la continuité des efforts de contact et en négligeant donc l'effet de tension superficielle.

On suppose que l'écoulement est irrotationnel dans chacune des couches fluides ( $\underline{\text{rot}} \underline{U}_1 = \underline{\text{rot}} \underline{U}_2 = \underline{0}$ ), ce qui permet d'écrire les champ de vitesses sous la forme

$$\underline{U}_1 = U_1 \underline{x} + \underline{\text{grad}} \phi_1 \quad \text{et} \quad \underline{U}_2 = U_2 \underline{x} + \underline{\text{grad}} \phi_2. \quad (37)$$

Le système d'équations s'écrit alors

$$\begin{aligned} \Delta \phi_1 = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\text{grad}} \left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \phi_1)^2 + \frac{p_1}{\rho_1} + g z \right] &= \underline{0} \\ \Delta \phi_2 = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\text{grad}} \left[ \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \phi_2)^2 + \frac{p_2}{\rho_2} + g z \right] &= \underline{0}. \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites

$$\left. \begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -\infty} \underline{\text{grad}} \phi_1 = \underline{0} \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \underline{\text{grad}} \phi_2 = \underline{0} \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta + \underline{\text{grad}} \phi_1 \cdot \underline{\text{grad}} \eta = \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta + \underline{\text{grad}} \phi_2 \cdot \underline{\text{grad}} \eta = \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad \text{et} \quad p_1 = p_2 \quad \text{en } z = \eta .$$

Comme  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont respectivement définis à une “constante” (en espace)  $C_1(t)$  et  $C_2(t)$  près, on peut choisir une pression de référence  $p_r$  arbitraire permettant d’éliminer la pression en écrivant

$$\begin{aligned} p_1 &= p_r - \rho_1 \left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \phi_1)^2 + g z \right] \\ p_2 &= p_r - \rho_2 \left[ \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \phi_2)^2 + g z \right] \end{aligned} \quad (38)$$

### 3.2 Linéarisation autour de l’équilibre

On s’intéresse à l’état de base  $\underline{U}_1 = U_1 \underline{e}_x$ ,  $\underline{U}_2 = U_2 \underline{e}_x$  et  $\eta = 0$ . La pression est alors  $p_0(z) = p_r - \rho_1 g z$  pour  $z \leq 0$  et  $p_0(z) = p_r - \rho_2 g z$  pour  $z \geq 0$  où  $p_r$  est une pression de référence arbitraire qui peut être choisie suffisamment grande pour éviter des pressions négatives dans une grande partie de la couche du haut qui est, en pratique, d’extension finie (mais grande).

On linéarise alors autour de cet état de base en posant  $p_1 = p_0(z) + \tilde{p}_1$ . La linéarisation conduit à négliger les termes non linéaires dans les équations mais aussi à remplacer les conditions aux limites sur la surface mobile d’équation  $z = \eta(x, y, t)$  par des conditions aux limites sur la surface fixe d’équation  $z = 0$ . En effet, pour un champ quelconque  $f(x, y, z, t)$  on peut écrire

$$f[x, y, \eta(x, y, t), t] = f(x, y, 0, t) [1 + O(\eta)] . \quad (39)$$

Le modèle est alors constitué de l’équation de Laplace  $\Delta \phi_1 = \Delta \phi_2 = 0$  dans le fluide avec les conditions aux limites :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -\infty} \underline{\text{grad}} \phi_1 = \underline{0} \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \underline{\text{grad}} \phi_2 = \underline{0} \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta = \frac{\partial \phi_1}{\partial z}, \quad p_1 = p_2, \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta = \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \quad \text{en } z = 0 . \end{aligned} \right.$$

En remplaçant la pression par sa valeur et en linéarisant on remplace la condition  $p_1 = p_2$  par la condition aux limites

$$\rho_1 \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_1 + g \eta \right] = \rho_2 \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_2 + g \eta \right] \quad \text{en } z = 0 . \quad (40)$$

Dans la mesure où le problème est invariant par translations en temps et en espace dans les directions horizontales, on cherche des solutions sous la forme

$$(\phi_1, \eta, \phi_2) = [\Phi_1(z), A, \Phi_2(z)] e^{ik_1 x + ik_2 y + st} . \quad (41)$$

On note ici  $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ . Le problème à résoudre est donc

$$\begin{aligned} \Phi_1'' - k^2 \Phi_1 = 0 \quad \text{et} \quad \Phi_2'' - k^2 \Phi_2 = 0 \quad \text{avec} \\ (s + i k_1 U_1) A = \Phi_1'(0) \quad \text{et} \quad (s + i k_1 U_2) A = \Phi_2'(0) \\ \rho_1 [(s + i k_1 U_1) \Phi_1(0) + g A] = \rho_2 [(s + i k_1 U_2) \Phi_2(0) + g A] \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} \Phi_1'(z) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \Phi_2'(z) = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

On en déduit  $\Phi_1(z) = A_1 e^{kz}$  et  $\Phi_2(z) = A_2 e^{-kz}$  avec

$$\begin{aligned} (s + i k_1 U_1) A = A_1 k \quad \text{et} \quad (s + i k_1 U_2) A = -A_2 k \\ \rho_1 [(s + i k_1 U_1) A_1 + g A] = \rho_2 [(s + i k_1 U_2) A_2 + g A] \end{aligned} \quad (43)$$

En reportant les valeurs de  $A_1$  et  $A_2$  en fonction de  $A$  et en simplifiant par  $A$  on obtient la relation de dispersion généralisée

$$\rho_1 [gk + (s + i k_1 U_1)^2] = \rho_2 [gk - (s + i k_1 U_2)^2] . \quad (44)$$

En résolvant cette équation de second degré, on obtient deux branches de solutions que l'on peut noter

$$[\Sigma_1(k_1, k_2), \Omega_1(k_1, k_2)] \quad \text{et} \quad [\Sigma_2(k_1, k_2), \Omega_2(k_1, k_2)] . \quad (45)$$

### 3.3 Calcul de stabilité dans deux cas particuliers

On montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équilibre soit instable est

$$g \sqrt{k_1^2 + k_2^2} (\rho_1^2 - \rho_2^2) < k_1^2 \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2 . \quad (46)$$

Il suffit, par exemple, de poser  $X = is$  dans (44) et de calculer le discriminant de l'équation du second degré en  $X$  ainsi obtenue. On voit donc l'écoulement est instable pour que  $U_1 \neq U_2$  et que les modes de petites de longueur d'ondes (grands  $k$ ) sont les plus instables. Une modélisation plus physique consiste alors à prendre en compte la viscosité qui a pour effet de dissiper l'énergie et aux petites échelles.

Plutôt que d'étudier de manière systématique tous les cas possibles, nous présentons ici quelques cas particuliers. Pour simplifier, on s'intéresse aux écoulements 2D, ce qui revient à poser  $k_2 = 0$ . On a donc  $k = |k_1|$ . En

utilisant la symétrie du au fait que le problème est réel, on peut alors n'étudier que le cas des vecteurs d'ondes  $k_1 > 0$ .

Un premier cas particulier consiste à supposer que  $\rho_1 = \rho_2$ . Le fluide est homogène et l'instabilité ne provient que du cisaillement des vitesses. La relation de dispersion généralisée s'écrit alors

$$(s + i k_1 U_1)^2 + (s + i k_1 U_2)^2 = 0 . \quad (47)$$

On en déduit les deux branches de modes suivants

$$\begin{aligned} \Sigma_1(k_1) &= \frac{k_1}{2}(U_1 - U_2), & \Omega_1(k_1) &= \frac{k_1}{2}(U_1 + U_2) \\ \Sigma_2(k_1) &= \frac{k_1}{2}(U_2 - U_1), & \Omega_2(k_1) &= \frac{k_1}{2}(U_1 + U_2) \end{aligned} \quad (48)$$

On voit que ces deux modes se propagent à la vitesse de phase  $c = (U_1 + U_2)/2$  qui est la vitesse moyenne des deux couches fluides. L'un des deux modes est instable dès que  $U_1 \neq U_2$  tandis que l'autre est stable.

Un deuxième cas particulier consiste à supposer que  $U_1 = U_2$ . En se plaçant dans le repère qui se déplace à cette vitesse commune, on peut se ramener au cas  $U_1 = U_2 = 0$ . La relation de dispersion généralisée s'écrit alors

$$\rho_1 (g k + s^2) = \rho_2 (g k - s^2) \quad \Longleftrightarrow \quad s^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} g k . \quad (49)$$

Si  $\rho_1$  est plus grand que  $\rho_2$  les deux racines  $s_1$  et  $s_2$  sont imaginaires pure et le système est marginal. Les ondes qui se développent à l'interface des deux fluides sont des ondes de gravité internes. Si  $\rho_2$  est plus grand que  $\rho_1$ , c'est-à-dire si le fluide du haut est le plus lourd, il existe une famille des modes instables dont le taux de croissance croît avec  $k$ . Il faut alors enrichir le modèle avec des termes de dissipation qui vont stabiliser les très petites échelles et sélectionner l'échelle des ondes instables.

## 4 Stabilité des écoulements parallèles

On s'intéresse ici à la stabilité des écoulements plans parallèles dont les vecteurs vitesse pointent dans une même direction et varient dans une direction orthogonale. Les instabilités de cisaillement ainsi obtenues permettent d'expliquer de nombreux phénomènes de transition de la mécanique des fluides.

### 4.1 Équations d'Orr-Sommerfeld

On se place dans le cadre des écoulements de fluide visqueux incompressibles qui sont décrits par les équations de Navier-Stokes

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} \underline{U} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \underline{U} \quad (50)$$

où  $\underline{U}(\underline{x}, t) = \underline{U}(x, y, z, t) = (u, v, w)$  est le champ de vitesse,  $\rho_0$  la masse volumique constante,  $p$  la pression et  $\nu$  la viscosité cinématique. On suppose que l'écoulement est compris entre les plans  $z = z_1$  et  $z = z_2$ , les bornes  $z_1$  et  $z_2$  étant éventuellement infinies dans le cas de domaines non bornés. Dans le cas visqueux ( $\nu \neq 0$ ), on impose les conditions aux limites  $\underline{U} = U_1 \underline{e}_x$  en  $z = z_1$  et  $\underline{U} = U_2 \underline{e}_x$  en  $z = z_2$ . Dans le cas inviscide ( $\nu = 0$ ), seules les conditions aux limites cinématique  $w = 0$  en  $z = z_1$  et  $z = z_2$  subsistent.

On s'intéresse aux solutions particulières de la forme  $\underline{U} = U_0(z) \underline{e}_x$ , où  $U_0(z)$  est un profil de vitesse ne dépendant que de  $z$  et  $\underline{e}_x$  un vecteur perpendiculaire à  $\underline{e}_z$ . On appelle "écoulement parallèle" une telle solution stationnaire dans la mesure où les trajectoires et les lignes de champ de la vitesse (confondues dans le cas stationnaire) sont des droites parallèles (à  $\underline{e}_x$ ).

En reportant cette forme de solution dans les équations de Navier-Stokes, la loi de conservation de la masse  $\operatorname{div} \underline{U} = 0$  est automatiquement satisfaite et la loi de conservation de la quantité de mouvement entraîne  $\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \nu U_0''(z)$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$  et  $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ , où  $U_0''$  désigne la dérivée seconde de  $U_0(z)$ .

Lorsque la viscosité moléculaire  $\nu$  est négligeable, les équations s'écrivent  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z}$ , ce qui implique que  $p = p_{\text{ref}}$  est une constante. Aucune contrainte n'est imposée pour la vitesse si bien que tous les profils  $U_0(z)$ , de formes quelconques, sont solutions.

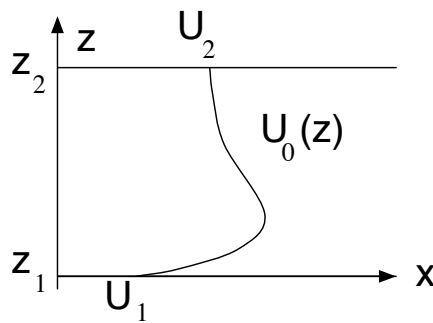


Figure 6: Écoulement parallèle.

Dans le cas où l'écoulement est visqueux, les équations entraînent  $\frac{\partial p}{\partial x} = G$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$  et  $G = \rho_0 \nu U_0''(z)$ , où  $G$  est une constante arbitraire. On en déduit que  $p = p_0(x)$  avec  $p_0(x) = p_{\text{ref}} + G x$ , où  $p_{\text{ref}}$  est une constante arbitraire, et  $U_0(z) = \frac{G}{2\rho_0\nu} z^2 + b z + c$  où  $b$  et  $c$  sont des constantes arbitraires ou bien déterminées par d'éventuelles conditions aux limites.

Pour étudier la stabilité de ces écoulements parallèles, on pose

$$\underline{U}(\underline{x}, t) = U_0(z) \underline{e}_x + \tilde{\underline{U}}(\underline{x}, t) \quad \text{et} \quad p(\underline{x}, t) = p_0(x) + \tilde{p}(\underline{x}, t) \quad (51)$$

et l'on suppose que  $\tilde{\underline{U}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$  et  $\tilde{p}$  sont des petites perturbations. En reportant dans les équations et en ne retenant que les termes linéaires, on obtient :

$$\text{div } \tilde{\underline{U}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{\underline{U}}}{\partial t} + U_0(z) \frac{\partial \tilde{\underline{U}}}{\partial x} \underline{e}_x + \tilde{w} U_0'(z) \underline{e}_x = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad } \tilde{p} + \nu \Delta \tilde{\underline{U}}. \quad (52)$$

Compte-tenu de l'invariance de ce système linéaire vis-à-vis des translations en temps et dans les direction  $x$  et  $y$ , on cherche des solutions sous la forme

$$[\tilde{\underline{U}}(\underline{x}, t), \tilde{p}(\underline{x}, t)] = [\tilde{\underline{U}}_m(z), p_m(z)] e^{i k_1 x + i k_2 y + s t} \quad (53)$$

avec  $\underline{U}_m = (u_m, v_m, w_m)$  et  $s = \sigma - i\omega \in \mathcal{C}$ . En reportant cette forme de solutions dans le modèles linéarisé, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} s + \Lambda(z, k_1, k_2) & 0 & U_0'(z) & \frac{1}{\rho_0} i k_1 \\ 0 & s + \Lambda(z, k_1, k_2) & 0 & \frac{1}{\rho_0} i k_2 \\ 0 & 0 & s + \Lambda(z, k_1, k_2) & -\frac{1}{\rho_0} D \\ i k_1 & i k_2 & D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

avec  $\Lambda(z, k_1, k_2) = i k_1 U_0(z) + \nu(D^2 - k_H^2)$ ,  $k_H^2 = k_1^2 + k_2^2$  et  $D = \frac{d}{dz}$ .

Les modes instables, s'ils existent, sont ceux pour lesquels la valeur propre  $s$  admet une partie réelle positive. Le théorème de Squire indique que pour tout mode instable tridimensionnel (3D), il existe un mode bidimensionnel (2D) dans le plan  $(x, z)$  qui est encore plus instable. Ce théorème se démontre en effectuant la transformation de Squire qui consiste à remplacer  $k_H$  par  $k_1$ ,  $k_1 \tilde{u} + k_2 \tilde{v}$  par  $k_1 \tilde{v}_1$  et  $k_H \tilde{p}$  par  $k_1 \tilde{p}$  pour passer du cas 3D au cas 2D. Nous l'admettrons ici pour nous concentrer sur les perturbations 2D de la forme

$$[\tilde{\underline{U}}(x, z, t), p(x, z, t)] = [u_m(z), v_m(z), p_m(z)] e^{i k_1 x + s t} \quad (55)$$

qui vérifient donc les équations

$$[s + \Lambda(z, k_1)] u_m + U_0'(z) w_m + \frac{1}{\rho_0} i k_1 p_m = 0$$



$$[s + \Lambda(z, k_1)]w_m + \frac{1}{\rho_0}D p_m = 0 \quad \text{et} \quad i k_1 u_m + D w_m = 0 \quad (56)$$

avec  $\Lambda(z, k_1) = i k_1 U_0(z) + \nu(D^2 - k_1^2)$ . En éliminant  $p_m$  et  $u_m$  de ce système, on obtient finalement l'équation d'Orr-Sommerfeld qui s'écrit

$$\left[ s + i k_1 U_0(z) - \nu(D^2 - k_1^2) \right] (D^2 - k_1^2) w_m = U_0''(z) w_m . \quad (57)$$

Les quatre conditions aux limites  $u_m(z_1) = u_m(z_2) = w_m(z_1) = w_m(z_2) = 0$  sur les deux parois planes ou à l'infini conduisent aux quatre conditions  $w_m(z_1) = w_m(z_2) = 0$  et  $w_m'(z_1) = w_m'(z_2) = 0$  pour cette équation différentielle ordinaire de degré quatre en  $z$ .

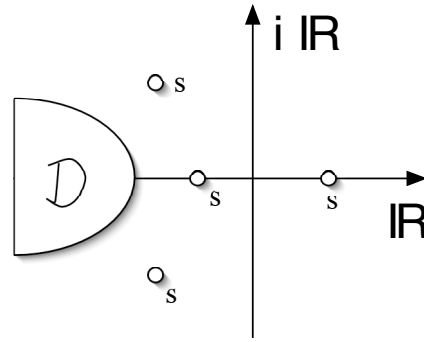


Figure 7: Spectre de l'opérateur dans le plan complexe.

Pour un vecteur d'onde donné  $k_1$ , ce système n'admet de solutions triviales que pour un ensemble discret de valeurs propres  $s_n(k_1)$  si le domaine est borné ou pour un ensemble discret de valeurs propres  $s_n(k_1)$  combinée à un spectre continu  $s \in \mathcal{D}(k_1)$  où  $\mathcal{D}(k_1)$  est une courbe ou une surface dans le plan complexe  $\mathcal{C}$ . La détermination des valeurs propres et vecteurs propres associés à un écoulement parallèle  $U_0(z)$  est un problème difficile et l'on a souvent recours à l'outil numérique pour le résoudre. En principe, seuls les profils  $U_0(z)$  de forme paraboliques peuvent être considérés dans le cas visqueux. En pratique, on étudie l'équation d'Orr-Sommerfeld des profils  $U_0(z)$  de formes quelconques c'est-à-dire pour la classe des solutions des équations de Navier-Stokes inviscides (équations d'Euler). Cette approximation revient à négliger le terme de dissipation visqueuse  $\nu U_0''(z)$  dans la mesure où il modifie la forme de  $U_0(z)$  sur des échelles de temps longues par rapport au temps caractéristique de croissance des instabilités.

## 4.2 Théorème du point d'inflexion dans le cas inviscide

Dans le cas inviscide  $\nu = 0$ , les équations de Navier-Stokes sont appelées “équations d’Euler” et l’équation d’Orr-Sommerfeld est appelée “l’équation de Rayleigh” qui s’écrit

$$[s + i k_1 U_0(z)] (D^2 - k_1^2) w_m = U_0''(z) w_m . \quad (58)$$

Les quatre conditions aux limites sur le profil  $w_m(z)$  de l’équation d’Orr-Sommerfeld se réduisent aux deux conditions  $w_m(z_1) = w_m(z_2) = 0$ , dans la mesure où le nombre de conditions aux limites est réduit lorsque l’on passe des équations de Navier-Stokes aux équations d’Euler. Par exemple, une condition d’adhérence à la paroi  $\underline{U} = \underline{0}$  pour le cas des équations de Navier-Stokes se réduit à une condition cinématique  $w = 0$  lorsque l’on prend la limite  $\nu = 0$  des équations d’Euler.

Comme on l’a déjà indiqué, tous les écoulements parallèles  $U_0(z) \underline{e}_x$  sont solutions dans le cas inviscide, de manière exacte. Un théorème, démontré par Rayleigh en 1880, indique qu’une condition nécessaire pour qu’un écoulement parallèle soit instable est l’existence d’un point d’inflexion dans le profil  $U_0(z)$ . Pour obtenir ce résultat, il suffit de multiplier l’équation de Rayleigh par  $w_m^*(z)$ , le complexe conjugué de  $w_m(z)$ . En intégrant l’équation ainsi obtenue sur le domaine compris entre les plans  $z = z_1$  et  $z = z_2$ , on obtient :

$$\int_{z_1}^{z_2} w_m^* (D^2 - k_1^2) w_m dz = i k_1 \int_{z_1}^{z_2} \frac{U_0''(z) |w_m|^2}{s + i k_1 U_0(z)} dz . \quad (59)$$

En intégrant par parties le terme  $w_m^* D w_m$  et en utilisant les conditions aux limites  $w_m(z_1) = w_m(z_2) = 0$ , on obtient

$$\int_{z_1}^{z_2} (|D w_m|^2 + k_1^2 |w_m|^2) dz + i k_1 \int_{z_1}^{z_2} \frac{U_0''(z) |w_m|^2}{s + i k_1 U_0(z)} dz = 0 \quad (60)$$

dont la partie imaginaire est

$$\sigma k_1 \int_{z_1}^{z_2} \frac{U_0''(z) |w_m|^2}{|s + i k_1 U_0(z)|^2} dz \quad (61)$$

avec  $s = \sigma - i\omega$ . On voit que si  $U_0''(z)$  ne change pas de signe, c’est-à-dire si  $U_0(z)$  n’admet pas de point d’inflexion, l’intégrale de cette équation est non nulle. On a donc  $\sigma = 0$ , ce qui interdit toute instabilité.

L’existence d’un point d’inflexion dans le profil  $U_0(z)$  est une condition nécessaire mais non suffisante pour l’existence d’une instabilité. En effet, il faut non seulement que  $\sigma$  soit non nul, mais aussi positif pour certaines valeurs de  $k_1$  si l’on doit observer des modes instables.

### 4.3 Instabilités visqueuses

Dans le cas général  $\nu \neq 0$ , l'équation d'Orr-Sommerfeld permet de trouver les valeurs propres  $s \in \mathcal{C}$  et, éventuellement, le spectre continu  $s \in \mathcal{D} \cup \mathcal{C}$  pour un vecteur d'onde  $k_1$  donnée. On rappelle que l'on considère la stabilité de profils  $U_0(z)$  de formes quelconques, même si, en principe, seules les profils paraboliques sont des solutions exactes des équations de Navier-Stokes. Cette approche est rendue possible en négligeant le terme de viscosité pour l'évolution du mouvement moyen cette viscosité étant néanmoins présente dans l'équation de Orr-Sommerfeld.

Nous nous contentons ici d'indiquer schématiquement l'allure des frontières de stabilité dans un plan  $(\frac{1}{\nu}, k_1)$  pour différentes formes de profils  $U_0(z)$ . L'étude approfondie des solutions de l'équation d'Orr-Sommerfeld est un problème assez difficile qui fait l'objet de plusieurs monographies citées en référence.

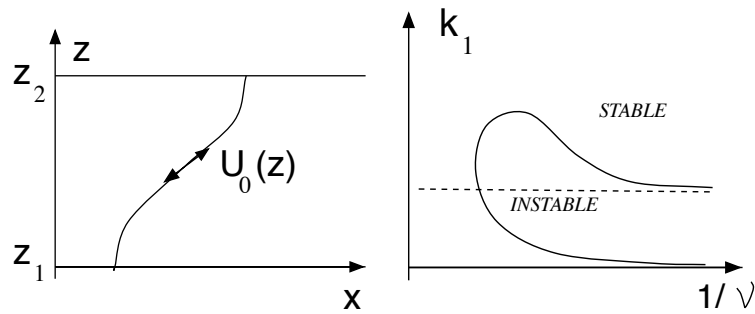


Figure 8: *Seuil d'instabilité pour un profil avec point d'inflexion*

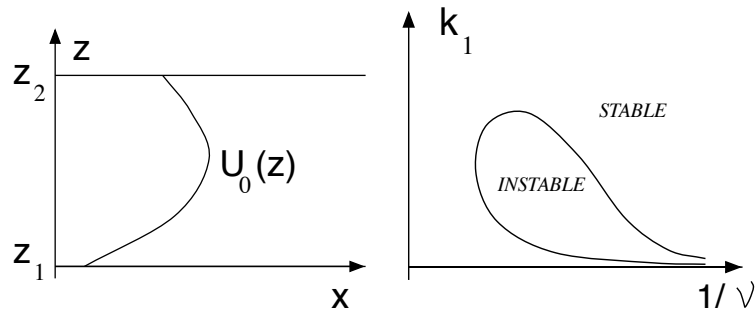


Figure 9: *Seuil d'instabilité pour un profil sans point d'inflexion*

La figure 8 présente l'allure schématique de la frontière entre les régimes stables et instable dans le plan  $(\frac{1}{\nu}, k_1)$  dans le cas où le profil  $U_0(z)$  admet un

point d'inflexion. On voit que dans la limite  $\nu \rightarrow \text{zero}$  il existe un intervalle de vecteurs d'ondes  $k_1$  pour lesquels certains modes sont instables.

La figure 9 représente schématiquement le cas où  $U_0(z)$  n'admet pas de point d'inflexion. Comme prédit par le théorème du point d'inflexion, l'écoulement est stable dans la limite  $\nu \rightarrow 0$ . C'est donc la viscosité qui est responsable de l'instabilité observée pour des  $\nu$  non négligeables. Le mécanisme physique responsable de cette instabilité visqueuse est assez subtil et n'est pas explicité ici. En gros, la présence de viscosité induit un déphasage dans la direction  $x$  des composantes périodiques du champ de vitesse, ce qui conduit à des mécanismes amplificateurs de la perturbation.

Pour conclure, on peut évoquer le cas de l'écoulement de Couette qui est caractérisé par un profil linéaire, c'est-à-dire à la frontière entre les profils avec ou sans points d'inflexions. L'étude de stabilité linéaire montre qu'il n'existe aucun mode instable pour cet écoulement. Les instabilités observées dans la réalité sont dues à des perturbations d'amplitudes finies, et donc à des effets non-linéaires, ce qui sort du cadre de la présente étude.

## Conclusion

Les quatre exemples qui ont été abordés ont permis de détailler le calcul de la relation de dispersion généralisée de modèles linéaires ou linéarisés autour d'un équilibre. Les modèles prototypes 1D ont permis de ramener la recherche des branches de valeurs propres, paramétrées par le vecteur d'onde  $k_1$ , à la recherche des racines d'un polynôme. L'instabilité des rolls-waves pour les équations de Saint Venant, qui se déclenche pour un nombre de Froude égale à deux, a permis de voir les limitations du modèle lorsque la dissipation visqueuse des petites échelles est négligée et que celles-ci sont les plus instables. L'étude de la stabilité des écoulements parallèles a permis de montrer que l'existence d'un point d'inflexion dans le profil influence fortement la nature des instabilités. On peut voir l'instabilité de Kelvin-Helmoltz comme un cas limite d'un écoulement parallèle admettant un point d'inflexion.

Pour les quatre exemples, on remarque que les modèles sont invariants par translations en temps et en espace dans la direction  $x$ . Ces invariances expliquent pourquoi l'on a recherché les modes propres à l'aide de la fonction  $\exp(i k_1 x + s t)$ . Lorsque le système n'est pas invariant par translation en  $z$ , comme c'est le cas pour l'instabilité des écoulements parallèles, la forme des modes propres doit être trouvée en appliquant des conditions aux limites.

On aurait pu aussi chercher des solutions sous la forme  $\exp(\gamma x + i k_1 x + i \omega t)$ , ou encore  $\exp(\gamma x + i k_1 x + \sigma t + i \omega t)$  pour prendre en compte des

amplifications en espace. Cette approche de la théorie des instabilités n'a pas été abordée ici, mais fait partie des outils important pour aller plus loin dans la compréhension des phénomènes réalistes en particulier pour les écoulements ouverts, comme par exemple les écoulements parallèles.