# EXERCICES ET PROBLÈMES

## EXERCICE 0.1 Obstacle immergé et roll-waves

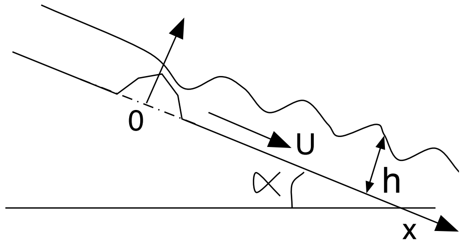


Figure 1: *Écoulement à surface libre sur un plan incliné*

On considère un écoulement peu profond à surface libre sur un plan incliné faisant un angle $\alpha$ avec l'horizontale dans un champ de gravité d'intensité $g$. On suppose que cet écoulement est unidimensionnel (1D) et on note $U(x,t)$ la vitesse moyennée dans un plan tranverse à l'écoulement et $h(x,t)$ la hauteur de la surface libre dans ce plan. On note $I = \sin\alpha$ et $g' = g\ \cos\alpha$.

### Modèle d'onde cinématique

On considère tout d'abord le modèle dans lequel la vitesse $U$ est reliée à la hauteur $h$ par la relation $U = K\ \sqrt{I}\ h^{\frac{2}{3}}$ où $K$ est une constante.

1) Écrire la loi de conservation de la masse sous la forme d'une équation aux dérivées partielles ne faisant intervenir que la hauteur $h(x,t)$.
2) On s'intéresse aux petites perturbations $\widetilde{h}(x,t)$ autour de la solution stationnaire $h_n$ en posant $h = h_n + \widetilde{h}$. Écrire l'équation linéarisée régissant la dynamique de $\widetilde{h}$.
3) Justifier la recherche de solutions complexes sous la forme : $\widetilde{h} = B\ \exp(i\,k_1\,x - i\,\omega\,t)$ où $B \in \mathbb{C}$.
4) Tracer la relation de dispersion en adoptant la convention $\omega \geq 0$.
5) Comparer les vitesses de phase et de groupe des ondes à la vitesse $U_n$ de l'écoulement.
6) En $x = 0$, on fait osciller à la pulsation $\omega_0$ un obstacle imergé dans l'écoulement. Décrire et dessiner le train d'ondes résultant de cette oscillation dans le cadre du modèle proposé.
7) À quelle vitesse se propagent les ondes émises par l'obstacle ? Comparer avec la vitesse des particules fluides.

**Modèle de Saint-Venant**

On considère maintenant le modèle des équations de Saint-Venant dans l'approximation des pentes faibles qui s'écrit

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\,\frac{\partial U}{\partial x} = -g'\,\frac{\partial h}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\,(U\,h) = 0\;. \tag{1}$$

8) On s'intéresse aux petites perturbations $\widetilde{U}(x,t)$ et $\widetilde{h}(x,t)$ autour de la solution stationnaire $(U_n, h_n) \in I\!R_+^2$ en posant $U = U_n + \widetilde{U}$ et $h = h_n + \widetilde{h}$. Écrire les équations linéarisées régissant la dynamique de $\widetilde{U}$ et $\widetilde{h}$.
9) Justifier la recherche de solutions complexes sous la forme : $(\widetilde{U}, \widetilde{h}) = (A, B)\ \exp(i\,k_1\,x - i\,\omega\,t)$ où $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.
10) Tracer les relations de dispersion des ondes en adoptant la convention $\omega \geq 0$. Discuter le tracé en fonction du nombre de Froude $F = U_n/\sqrt{g\,h_n}$.
11) En $x = 0$, on fait osciller à la pulsation $\omega_0$ un obstacle imergé dans l'écoulement. Décrire et dessiner les trains d'ondes résultant de cette oscillation dans le cadre du modèle proposé.

**Modèle des "roll-waves"**

On considère maintenant le modèle des équations de Saint-Venant avec frottement turbulent qui s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U\,\frac{\partial U}{\partial x} &= -g'\,\frac{\partial h}{\partial x} + g\,I - \frac{1}{2}\,C_f(h)\,\frac{U\,|U|}{h} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\,(U\,h) &= 0\;, \end{aligned} \tag{2}$$

et ou suppose que le coefficient de frottement est modélisé par une loi de la forme $C_f(h) = D\;h^{-\beta}$ avec $D > 0$ et $\beta \geq 0$.

12) On s'intéresse aux petites perturbations $\widetilde{U}(x,t)$ et $\widetilde{h}(x,t)$ autour de la solution stationnaire $(U_n, h_n) \in I\!R_+^2$ en posant $U = U_n + \widetilde{U}$ et $h = h_n + \widetilde{h}$. Écrire les équations linéarisées régissant la dynamique de $\widetilde{U}$ et $\widetilde{h}$.
13) Justifier la recherche de solutions complexes sous la forme : $(\widetilde{U}, \widetilde{h}) = (A, B)\ \exp(i\,k_1\,x + s\,t)$ avec $s = \sigma - i\,\omega \in \mathbb{C}$ et $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.
14) Écrire, par exemple à l'aide de grandeurs adimensionnées, la relation de dispersion généralisée régissant la stabilité de la solution stationnaire $(U_n, h_n)$. On pourra noter $d = D\,h_n^{-\beta}$ et $F = U_n/\sqrt{g\,h_n}$.
15) On observe l'apparition du seuil d'instabilité lorsque $F \geq 1.5$. En déduire la valeur de l'exposant $\beta$.

16) On règle $U_n$ et $h_n$ pour se placer dans le cas marginal $F = 1.5$ et l'on fait osciller, en $x = 0$ et à la pulsation $\omega_0$ un obstacle imergé dans l'écoulement. Décrire et dessiner les trains d'ondes résultant de cette oscillation dans le cadre du modèle proposé.

*Corrigé page* **??**