CORRIGÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

Corrigé 0.1 Angle du sillage d'un bateau

1)Dans le repère lié à l'obstacle, la nouvelle relation de dispersion s'écrit $\omega = \Omega(\underline{k}) = \Omega_i(\underline{k}) + \underline{k}\cdot\underline{V} = \sqrt{g\,k} + k_1\,V$. Les nombres d'ondes émis par le bateau sont ceux qui correspondent à $\omega = 0$, soit $\sqrt{g\,k} + k_1\,V = 0$. On en déduit $g^2(k_1^2 + k_2^2) = k_1^4\,V^4$ et donc $k_2 = \pm k_1\sqrt{\frac{V^4 k_1^2}{g^2} - 1}$ pour $k \geq k_*$ avec $k_* = \frac{g}{V^2}$. Donc $F(k_1) = k_1\sqrt{k_1^2/k_*^2 - 1}$. **2)**La pente de F est infinie en $k_1 = k_*$. F admet l'asymptote $k_1^2/k_* - 1/2$ pour $k_1 \to \infty$. Les vitesses de groupes sont des vecteurs perpendiculaires à la courbe $k_2 = \pm F(k_1)$ et pointant vers les $k_1 \geq 0$. **3)**Comme $F'(k_1) = \frac{2k_1^2/k_*^2 - 1}{\sqrt{k_1^2/k_*^2 - 1}}$ et $F''(k_1)/F'(k_1)$ s'annule pour $k_1^2 = \frac{3}{2}k_*^2$, on en déduit que la pente de F au point d'inflexion est $2\sqrt{2}$. Les directions des vitesses de groupe sont donc situées dans un secteur de demi-angle $\beta_s = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \sim 19.5°$. Cet angle ne dépend pas de la vitesse de l'obstacle.

Corrigé 0.2 Ondes d'inerties 3D

1)Pour la relation $\omega = \Omega(\underline{k}) = f|\sin\theta|$, le calcul du gradient par rapport à $\underline{k}$ peut être effectué en utilisant les coordonnées polaires (k,θ). On suppose tout d'abord $\theta \in [0,\pi]$. On obtient alors $\underline{c}_g(\underline{x}) = \underline{\mathrm{grad}}_k\Omega_d(\underline{k}) = \partial\Omega_d/\partial k\ \underline{e}_k + (1/k)\partial\Omega_d/\partial\theta\ \underline{e}_\theta = (f\cos\theta/k)\underline{e}_\theta = (\omega/k)\mathrm{cotg}\,\theta\underline{e}_\theta$. On obtient l'expression $\underline{c}_g(\underline{k}) = -(f\cos\theta/k)\ \underline{e}_\theta = (\omega/k)\mathrm{cotg}\,\theta\ \underline{e}_\theta$ à partir de la relation de dispersion $\omega = \Omega_g(\underline{k}) = -f\sin\theta$. D'où $\underline{c}_g(\underline{k}) = (\omega/k)\mathrm{cotg}\,\theta\,\underline{e}_\theta$. Le cas $\theta \in [-\pi, 0]$ s'obtient à partir du cas précédent par symétrie par rapport à l'axe des x. **2)**La vitesse de phase est définie par $\underline{c}_\varphi(\underline{k}) = (\omega/k)\underline{e}_k$. On a donc $\underline{c}_\varphi(\underline{k})\cdot\underline{c}_g(\underline{k}) = 0$. La vitesse de groupe est normale à la vitesse de phase et donc au vecteur d'onde. **3)**L'énergie se propage avec la vitesse de groupe. On a donc $\beta = \theta_0$ avec $\theta_0 = \arcsin(\omega_0/f)$.

Corrigé 0.3 Ondes de surface capillaires

1)En remplaceant $k = K\,\alpha^{-\frac{1}{2}}\,g^{\frac{1}{2}}$ dans la relation de dispersion on obtient $A = \alpha^{-\frac{1}{4}}\,g^{\frac{3}{4}}$ qui a la dimension d'une pulsation (s^{-1}). **2)**La fonction est paire, croissante de 0 à l'infini pour $K_1 \geq 0$. La pente en $0^\pm$ est infinie. **3)**Les intersections de la courbe $Y = W_i(K_1)$ et de la droite $Y = -\lambda K_1$ s'obtiennent en résolvant $\sqrt{(1+K^2)K} = -\lambda\, K_1$ et donc $(1+K^2)K = \lambda^2\, K^2$. Outre la solution triviale $K{=}0$, les autres solutions de cette équation sont les racines de $K^2 - \lambda^2\, K + 1 = 0$ et n'existent que pour $\lambda_* < |\lambda|$ avec $\lambda_* = \sqrt{2}$. Elle s'écrivent alors $K_\pm = \frac{1}{2}\left(\lambda^2 \pm \sqrt{\lambda^4 - 4}\right)$. En conclusion, il y a trois intersections pour $\lambda < -\lambda_*$ en $K_1 \in \{-K_+, -K_-, 0\}$ et pour $\lambda > \lambda_*$ en $K_1 \in \{0, K_-, K_+\}$. Il y a deux intersections pour $|\lambda| = \lambda_*$ en $K_1 \in \{0, 1\}$ et une seule pour $-\lambda_* < \lambda < \lambda_*$ en $K_1 = 0$. **4)**Pour $0 < \lambda_* < \beta$, la courbe $Y = W_+(K_1) = W_i(K_1) + \beta\, K_1$ est positive pour $K_1 \in [-K_+, -K_-]$ et $K_1 > 0$ et s'annule aux bornes finies de ces domaines. En remarquant que $W_-(K_1) = -W_+(-K_1)$, on voit que la courbe $Y = W_-(K_1) = -W_i(K_1) + \beta\, K_1$ est positive seulement pour $K_1 \in [K_-, K_+]$. **5)**Les nouvelles relations de dispersion dans le repère lié à l'obstacle s'écrivent $\omega = \Omega_+(k_1) = \Omega_i(k_1) + k_1\, V$ et $\omega = \Omega_-(k_1) = -\Omega_i(k_1) + k_1\, V$. On a donc $\Omega_\pm(k_1) = \pm\sqrt{(g + \alpha\, k^2)k} + V\, k_1 = A\, [\pm\, W_i(K_1) + \beta\, K_1]$ avec $\beta = V\, \alpha^{-\frac{1}{4}}\, g^{-\frac{1}{4}}$ et $K_1 = \alpha^{\frac{1}{2}}\, g^{-\frac{1}{2}}\, k_1$. Les ondes liées à l'obstacle sont celles qui vérifient $\Omega_\pm(k_1) = 0$, c'est-à-dire $W_\pm(K_1) = 0$. Pour $\beta > \lambda_*$, c'est-à-dire $V > V_*$ avec $V_* = \sqrt{2}\, \alpha^{\frac{1}{4}}\, g^{\frac{1}{4}}$ il y a quatre solutions $k_1 \in \{-k^{(g)}, -k^{(d)}, k^{(d)}, k^{(g)}\}$ avec $k^{(d)} = \alpha^{-\frac{1}{2}}\, g^{\frac{1}{2}}\, K_-$ et $k^{(g)} = \alpha^{-\frac{1}{2}}\, g^{\frac{1}{2}}\, K_+$. **6)**Les ondes $k_1 = -k^{(g)}$ et $k_1 = k^{(g)}$ sont associées à une vitesse de groupe négative ; elles ne sont donc visibles qu'à gauche de l'obstacle. De même, les ondes $k_1 = -k^{(d)}$ et $k_1 = k^{(d)}$ sont associées à une vitesse de groupe positive et ne sont visibles qu'à droite. Comme $k^{(d)} < k^{(g)}$, les ondes situées en amont de l'obstacle (à gauche) ont une longueur d'onde plus petite que les ondes situées en aval (à droite). **7)**L'application numérique conduit à $V_* = \sqrt{2}\, \alpha^{\frac{1}{4}}\, g^{\frac{1}{4}} = .23$ m/s. **8)**Pour $V < V_*$, il n'y a pas d'ondes liées à l'obstacle. L'amplitude des ondes décroît exponentiellement avec la distance à l'obstacle. **9)**Dans le cas $\alpha = 0$, on trouve des ondes liées quelque soit la vitesse V mais uniquement à l'aval de l'obstacle. Pour $V < V_*$, la tension superficielle inhibe le sillage de l'obstacle. Pour $V > V_*$, la tension superficielle produit, en plus du train d'ondes longues aval, un train d'ondes capillaires (petites longueurs d'ondes) qui remonte le courant.