

COURS ÉCRIT

1	Obstacle oscillant en milieu 1D	2
2	Obstacle oscillant	8
3	Obstacle oscillant ou mobile	16

Introduction

On considère un milieu homogène dans lequel des ondes monochromatiques $u(\underline{x}, t) = u_m e^{i\mathbf{k}\cdot\underline{x} - i\omega_i t}$ sont régies par une ou plusieurs relations de dispersion de la forme $\omega = \Omega_i(\mathbf{k})$. On s'intéresse ici aux trains d'ondes émis par un obstacle qui oscille sur place à une pulsation ω_0 ou qui est animé d'un mouvement uniforme de vitesse $-\underline{V}$, les deux situations pouvant être concomitantes. On suppose que l'obstacle est localisé dans l'espace et l'on se place suffisamment loin pour pouvoir ignorer son sillage proche.

Pour modéliser cette situation, on représente le mouvement de l'obstacle par un terme de forçage $f(\underline{x} + \underline{V}t) e^{-i\omega_0 t}$ localisé en espace dans les équations aux dérivées partielles linéaires qui décrivent les ondes. Dans le cas où l'obstacle est un corps solide et le milieu un fluide, ce forçage modélise les conditions aux limites que l'on devrait imposer à l'interface fluide-structure pour bien décrire le sillage proche. Cette modélisation de l'obstacle se justifie ici dans la mesure où seul le sillage lointain nous intéresse.

On montre que le sillage loin de l'obstacle ne dépend que de la relation de dispersion $\Omega(\mathbf{k}) = \Omega_i(\mathbf{k}) + \mathbf{k} \cdot \underline{V}$ et que la vitesse de groupe définie par $\underline{c}_g(\mathbf{k}) = \underline{\text{grad}}_{\mathbf{k}} \Omega(\mathbf{k}) = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial k_1}, \frac{\partial \Omega}{\partial k_2}, \frac{\partial \Omega}{\partial k_3} \right)$ joue un rôle essentiel dans sa détermination. En effet, un point \underline{x} de l'espace ne verra passer que les ondes de vecteurs d'onde \mathbf{k} vérifiant simultanément $\omega_0 = \Omega(\mathbf{k})$, $\underline{c}_g(\mathbf{k}) \wedge \underline{x} = \underline{0}$ et $\underline{c}_g(\mathbf{k}) \cdot \underline{x} > 0$.

Ce résultat est présenté dans les cas unidimensionnel (1D) et bidimensionnel (2D) mais peut se généraliser à d'autres dimensions (3D). Il est illustré sur

l'exemple de trois types d'ondes dans les fluides : les ondes sonores, les ondes de gravité internes et les ondes de surface en milieu peu profond ou très profond.

1 Obstacle oscillant en milieu 1D

On étudie tout d'abord le cas d'un obstacle oscillant à la pulsation ω_0 dans un milieu 1D. À partir d'une équation modèle (Korteweg de Vries linéaire), on montre que la résolution du problème conduit à une infinité de solutions liée à l'existence d'ondes libres solutions du problème non forcé. Pour lever cette indétermination, il faut introduire dans le système une dissipation artificielle et regarder les solutions dans la limite où cette dissipation tend vers zéro. On met alors en évidence l'importance de la vitesse de groupe $c_g(k_1) = \Omega'(k_1)$. On montre en effet que seules les ondes de vecteurs d'onde k_1 tels que $\omega_0 = \Omega(k_1)$ et $c_g(k_1) > 0$ (respectivement < 0) sont émises vers la droite (respectivement vers la gauche). Pour bien bien illustrer cette notion, on complète la présentation avec l'exemple des ondes sonores.

1.1 Chemins dans le plan complexe

On considère l'équation unidimensionnelle modèle suivante (équation de Korteweg de Vries linéaire forcée) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = f(x) e^{-i\omega_0 t} \quad (1)$$

où $f(x) e^{-i\omega_0 t}$ modélise le forçage exercé par un obstacle oscillant. La relation de dispersion des ondes $u(x, t) = u_m e^{i k_1 x - i \omega t}$, de "vecteur d'onde" k_1 (le nombre d'onde étant la valeur absolue $k = |k_1|$) et de pulsation ω s'écrit $\omega = \Omega(k_1) = \alpha k_1 - \beta k_1^3$. Les solutions réelles répondant à la partie réelle du forçage s'obtiennent en prenant la partie réelle des solutions complexes. On peut alors adopter la convention $\omega \geq 0$ dans la mesure où les ondes (u_m, k_1, ω) et $(u_m^*, -k_1, -\omega)$ ont la même partie réelle.

On suppose que $f(x)$ admet la décomposition de Fourier spatiale

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k_1) e^{i k_1 x} dk_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{f}(k_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i k_1 x} dx. \quad (2)$$

Cherchons alors des solutions sous la forme

$$u(x, t) = e^{-i\omega_0 t} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(k_1) e^{i k_1 x} dk_1. \quad (3)$$

En reportant dans l'équation, on doit vérifier

$$i[-\omega_0 + \Omega(k_1)] \hat{u}(k_1) = \hat{f}(k_1) . \quad (4)$$

Dans le cas où l'équation $\omega_0 = \Omega(k_1)$ n'admet pas de racine réelle k_1 , on a construit la solution particulière :

$$u(x, t) = \frac{1}{i} e^{-i\omega_0 t} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(k_1)}{-\omega_0 + \Omega(k_1)} e^{ik_1 x} dk_1 . \quad (5)$$

Les autres solutions s'en déduisent en ajoutant une superposition d'ondes de la forme $u_m e^{ik_1 x - i\Omega(k_1)t}$, ces dernières appartenant au noyau de l'opérateur linéaire.

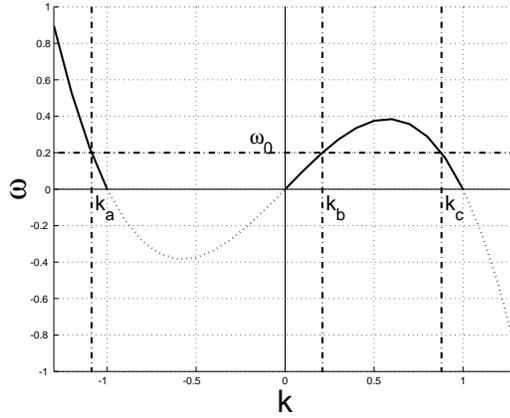


Figure 1: Pôles pour la relation de dispersion de KdV linéaire.

Dans le cas où il existe des vecteurs d'onde $k_n, n \in I$ tels que $\Omega(k_n) = \omega_0$, l'intégrale de l'équation (5) diverge à cause des pôles de l'intégrande. Pour la présente relation de dispersion $\omega = \Omega(k_1) = \alpha k_1 - \beta k_1^3$ avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a $I = \{a\}$ ou $I = \{a, b, c\}$ (figure 1) suivant les valeurs de $\omega_0 > 0$, le cas $I = \{a, b\}$ étant obtenu pour la valeur très précise ω_0 égale au maximum local de $\Omega(k_1)$.

On peut toutefois construire une famille de solutions particulières de la forme

$$u(x, t) = \frac{1}{i} e^{-i\omega_0 t} \int_{\mathcal{C}} \frac{\hat{f}(k_1)}{-\omega_0 + \Omega(k_1)} e^{ik_1 x} dk_1 \quad (6)$$

où \mathcal{C} est un chemin du le plan complexe \mathcal{C} reliant $-\infty$ et $+\infty$ et ne passant pas par les pôles (figure 2). Il suffit de remplacer cette expression dans l'équation (1) pour vérifier que l'on a bien construit une solution (complexe).

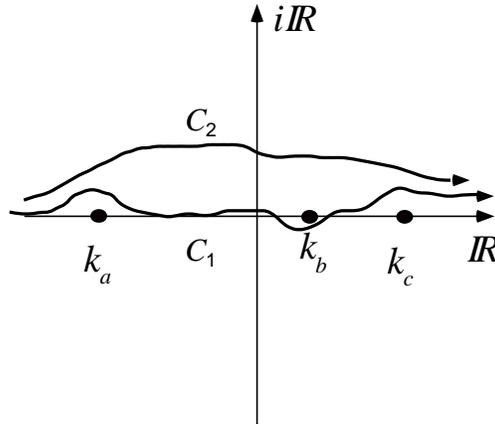


Figure 2: Chemins d'intégration \mathcal{C} dans le plan complexe.

Suivant que le chemin \mathcal{C} passe au-dessus ou au-dessous de ces pôles réels $k_n, n \in I$ de l'intégrande, on obtient des solutions particulières qui diffèrent les unes des autres des quantités

$$2\pi \frac{\hat{f}(k_n)}{c_g(k_n)} e^{ik_n x - i\omega_0 t}. \quad (7)$$

Il suffit, pour le voir, d'appliquer la méthode des résidus dans le plan complexe en utilisant le fait que $\Omega'(k_1) = c_g(k_1)$. Ces différences sont, bien évidemment, solutions de l'équation homogène (sans second membre) si l'on tient compte du fait que $\omega_0 = \Omega(k_n)$.

L'ensemble des solutions s'obtient en rajoutant, à l'une de ces solutions particulière, une superposition d'ondes de la forme $u_m e^{ik_1 x - i\Omega(k_1)t}$. Nous avons donc décrit l'espace des solutions en donnant une solution particulière et en y ajoutant un élément quelconque du noyau de l'opérateur linéaire.

1.2 Limite des faibles dissipations et sillage lointain

Notre intuition nous dit que parmi l'infinité des solutions que nous avons construites mathématiquement, une seule correspond physiquement au train d'ondes émis par l'obstacle oscillant. Les autres solutions tiennent compte "d'ondes arbitraires" qui "ne font que passer". Ces ondes "passagères" sont, par exemple, émises par des sources lointaines. Elles ne sont donc pas "liées" à la présence de l'obstacle considéré. Pour effectuer la discrimination entre les "ondes libres" et les "ondes liées" à l'obstacle, on peut considérer que

l'équation (1) est la limite, quand ϵ tend vers zéro, de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -\epsilon u + f(x) e^{-i\omega_0 t} \quad (8)$$

où le terme $-\epsilon u$ modélise une faible dissipation des ondes. Une solution particulière de cette équation est donnée par la relation

$$u(x, t) = \frac{1}{i} e^{-i\omega_0 t} \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{f}(k_1)}{-\omega_0 + \Omega(k_1) - i\epsilon} e^{i k_1 x} dk_1 \quad (9)$$

à laquelle il est permis d'ajouter une superposition d'ondes amorties de la forme $u_m e^{-\epsilon t} e^{i k_1 x - i \Omega(k_1) t}$ pour obtenir l'ensemble des solutions. On peut donc décomposer les solutions en la somme de la solution particulière (9), qui n'est a priori pas dissipée au cours du temps, et d'une combinaison linéaire d'ondes évanescentes.

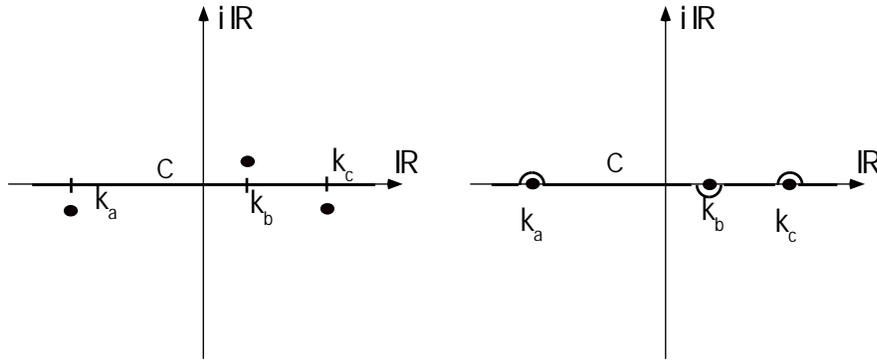


Figure 3: Position des pôles dans le plan complexe en fonction de la dissipation (a) $\epsilon > 0$ (b) $\epsilon = 0$.

Grâce à l'introduction de la faible dissipation ϵ , les pôles $Z_n = k_n + i \kappa_n \in \mathcal{C}$ avec $n \in I$, solutions de $\Omega(Z_n) = \omega_0 + i\epsilon$, sont maintenant complexes. En écrivant $\Omega(Z_n) = \Omega(k_n + i \kappa_n) = \Omega(k_n) + i \Omega'(k_n) \kappa_n + O(\kappa_n^2)$ et en utilisant $\Omega(k_n) = 0$ et $c_g(k_n) = \Omega'(k_n)$, on obtient l'expression

$$Z_n = k_n + i \epsilon / c_g(k_n) + O(\epsilon^2), \quad n \in I. \quad (10)$$

On voit que si la vitesse de groupe $c_g(k_n) = \Omega'(k_n)$ est positive, le pôle se trouve au-dessus de la droite réelle. Il se trouve en-dessous pour $c_g(k_n) < 0$. On note I_+ l'ensemble des indices n tels que $c_g(k_n) > 0$ et I_- l'ensemble des indices n tels que $c_g(k_n) < 0$.

Lorsque ϵ tend vers zéro, la solution non dissipée s'exprime en considérant le chemin complexe \mathcal{C} (figure 3) qui passe en-dessous des pôles réels k_n avec $n \in I_+$ ($c_g > 0$) et au-dessus des pôles réels k_n avec $n \in I_-$ ($c_g < 0$).

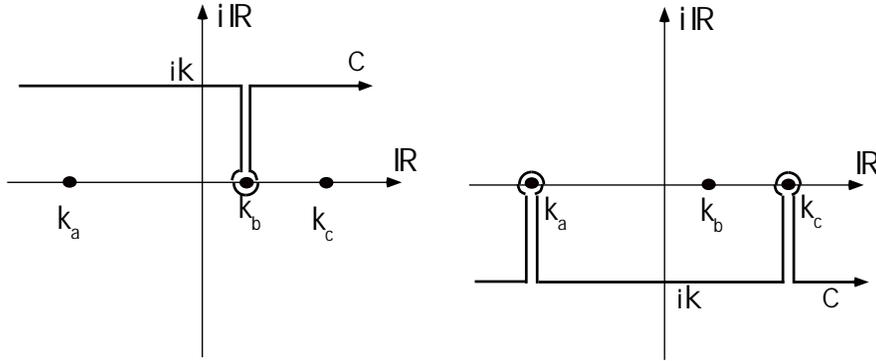


Figure 4: Déformation du chemin \mathcal{C} pour étudier le comportement loin de l'obstacle (a) $\kappa > 0$ pour $x \rightarrow \infty$ (b) $\kappa < 0$ pour $x \rightarrow -\infty$.

On s'intéresse alors au comportement de la solution non dissipée dans la limite $x \rightarrow \infty$, c'est-à-dire *loin de l'obstacle* et sur sa droite. Pour cela, on déforme le contour \mathcal{C} en l'éloignant d'une distance $i\kappa$ vers le haut, avec $\kappa > 0$. Lorsqu'elle est possible, cette opération conduit à un comportement qui tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$ (contribution en $1/x$ au maximum à cause des raccords en $k = \pm\infty$). Cette déformation n'est cependant pas possible au voisinage des pôles k_n tels que $n \in I_+$ c'est-à-dire tels que $c_g(k_n) > 0$. Le contour déformé reste donc "accroché" à ces pôles (figure 4). Ces derniers produisent une contribution que l'on calcule par la méthode des résidus. L'expression finale de la solution non dissipée dans la limite $x \rightarrow \infty$ est donc

$$u(x, t) \sim 2\pi \sum_{n \in I_+} \frac{\hat{f}(k_n)}{c_g(k_n)} e^{i k_n x - i \omega_0 t}. \quad (11)$$

Ce résultat s'interprète de la manière suivante : l'obstacle oscillant à la pulsation ω_0 émet vers la droite les ondes de vecteurs d'onde k_1 solutions de $\omega_0 = \Omega(k_1)$ dont la vitesse de groupe est positive (figure 5). On démontre de même que les ondes émises vers la gauche doivent avoir une vitesse de groupe négative. On a donc mis en évidence le rôle important de la vitesse de groupe pour la propagation de l'énergie.

1.3 Exemple des ondes sonores

On considère ici l'exemple de l'équation des ondes 1D forcée qui s'écrit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x) e^{-i \omega_0 t} \quad (12)$$

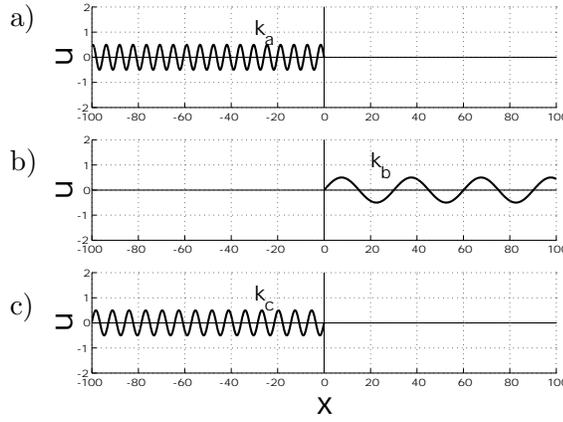


Figure 5: Ondes émises par un obstacle oscillant à la pulsation ω_0 . (a) $c_g(k_a) < 0$ (b) $c_g(k_b) > 0$ (c) $c_g(k_c) < 0$.

et qui modélise le train d'ondes sonores émises par une source oscillant à la pulsation ω_0 . Le champ $u(x, t)$ est alors le potentiel des vitesses ou bien la pression et la constante c est la vitesse du son.

En appliquant le même formalisme que précédemment, on exprime des solutions particulières (complexes) sous la forme :

$$u(x, t) = e^{-i\omega_0 t} \int_{\mathcal{C}} \frac{\hat{f}(k_1)}{-\omega_0^2 + c^2 k_1^2} e^{i k_1 x} dk_1 \quad (13)$$

où \mathcal{C} est un chemin quelconque dans le plan complexe \mathcal{C} reliant $-\infty$ et $+\infty$. En effectuant une décomposition en éléments simples, cette expression s'écrit $u(x, t) = e^{-i\omega_0 t} [U_+(x) + U_-(x)]$ avec

$$U_{\pm}(x) = \mp \frac{1}{2\omega_0 c} \int_{\mathcal{C}} \frac{\hat{f}(k_1)}{k_1 \pm k_0} e^{i k_1 x} dk_1 \quad (14)$$

et $k_0 = \frac{\omega_0}{c}$. Suivant que le chemin \mathcal{C} passe au-dessus ou en-dessous des pôles $k_1 = \pm k_0$, les solutions diffèrent des quantités $\mp \frac{i\pi}{\omega_0 c} \hat{f}(\pm k_0) e^{\pm i k_0 x - i\omega_0 t}$.

Pour sélectionner la solution physique parmi l'infinité des solutions mathématiques, on pourrait introduire une dissipation en $\epsilon \frac{\partial u}{\partial t}$ dans le terme de gauche de l'équation. Mais pour compléter la présentation, on choisit ici de considérer un forçage en $f(x) e^{\epsilon t - i\omega_0 t}$ avec $\epsilon/\omega_0 \ll 1$ très petit. Cette croissance exponentielle lente brise l'invariance temporelle du modèle et introduit une notion de causalité dans la génération des ondes par l'obstacle. Pour une expérience concrète, le forçage doit en effet être introduit à un moment donné dans un milieu initialement au repos. La solution croissante obtenue avec ce

nouveau forçage s'écrit donc

$$u(x, t) = e^{\epsilon t - i \omega_0 t} \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{f}(k_1)}{-(\omega_0 + i \epsilon)^2 + c^2 k_1^2} e^{i k_1 x} dk_1 \quad (15)$$

avec un chemin d'intégration qui peut être l'axe réel dans la mesure où les pôles en sont écartés à une distance de l'ordre de ϵ . Les solutions de l'équation homogène que l'on pourrait ajouter sont bornées et ne peuvent donc pas être observées si elles sont petites initialement (ce que l'on suppose).

En faisant tendre ϵ vers zéro et en regardant loin de l'obstacle (x grand), une déformation des contours dans le plan complexe montre que

$$\begin{aligned} U_{\pm}(x) &\sim -\frac{i \pi}{\omega_0 c} f(\pm k_0) e^{\pm i k_0 x} && \text{pour } \pm x \rightarrow \infty \\ \text{et } U_{\pm}(x) &\sim 0 && \text{pour } \mp x \rightarrow \infty . \end{aligned}$$

L'onde de vecteur d'onde $k_0 = \omega_0/c$ et de vitesse de phase $c_{\varphi}(k_0) = c > 0$ est observée à droite de l'obstacle tandis que l'onde de vecteur d'onde $-k_0$ et de vitesse de phase $c_{\varphi}(-k_0) = -c < 0$ est observée à gauche. Étant donné que pour le présent modèle non-dispersif la vitesse de groupe est égale à la vitesse de phase, on retrouve bien le résultat général annoncé.

2 Obstacle oscillant

On s'intéresse ici au sillage lointain d'un obstacle oscillant à la pulsation $\omega_0 > 0$ dans un milieu 2D ou 3D. Comme dans le cas 1D, seules les ondes de pulsation ω_0 sont émises. La vitesse de groupe est ici un vecteur $\underline{c}_g(\underline{k})$ défini comme étant le gradient en \underline{k} de la relation de dispersion $\Omega(\underline{k})$. Pour l'exemple des ondes de gravité interne, cette vitesse de groupe est orthogonale à la vitesse de phase et donc à \underline{k} . Dans ce cas, on observe et on explique que le sillage a la forme d'une "croix de Saint-André" composée de quatre branches dirigées dans le sens des quatre vitesses de groupes orthogonales aux quatre vecteurs d'onde \underline{k} émis. Dans le cas d'une relation de dispersion quelconque, il faut utiliser la "méthode de la phase stationnaire" pour retrouver le résultat général suivant : un point \underline{x} voit passer les ondes de vecteurs d'onde \underline{k} tels que $\omega_0 = \Omega(\underline{k})$ et tels que la vitesse de groupe $\underline{c}_g(\underline{k})$ est parallèle et dans le même sens que \underline{x} . Ce résultat permet alors de tracer les lignes d'isophasse du train d'ondes correspondant au sillage lointain de l'obstacle oscillant. Par simplicité, on présente la plupart des concepts sur l'exemple d'un milieu 2D dispersif quelconque. L'extension au cas d'un milieu 3D dispersif constitue un approfondissement qui n'est pas développé ici.

2.1 Exemple de la croix de Saint-André

On considère un fluide au repos dont la masse volumique $\rho_0(z)$ décroît avec l'altitude z . On suppose que la fréquence de "Brunt-Väisälä" $N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_r} \frac{d\rho_0(z)}{dz}}$, où ρ_r est une valeur moyenne, peut être considérée comme une constante. Les ondes de gravité internes $u(\underline{x}, t) = u_m e^{i \underline{k} \cdot \underline{x} - i \omega t}$, où u est une des composantes de vitesse ou encore le champ de fluctuation de masse volumique, sont décrites dans le cadre de "l'approximation de Boussinesq" : écoulement incompressible avec prise en compte de la force d'Archimède. On admet ici que la relation de dispersion s'écrit $\omega = \Omega(\underline{k}) = N |\cos \theta(\underline{k})|$ où $\underline{k} = (k_1, k_2, k_3)$ et $\theta(\underline{k})$ est l'angle que fait \underline{k} avec sa projection \underline{k}_H sur le plan horizontal, ou bien avec le vecteur horizontal $\underline{e}^{(1)}$ dans le cas 2D où l'on suppose $k_2 = 0$. La convention $\omega \geq 0$ est adoptée ici. On remarque que la pulsation ω ne dépend pas du module $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$.

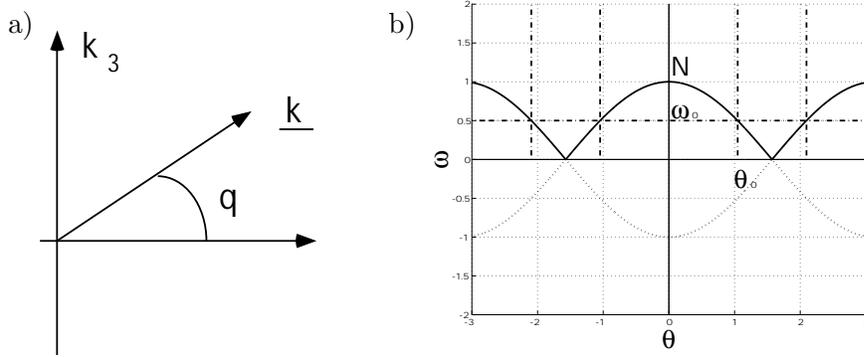


Figure 6: a) Définition de $\theta(\underline{k})$ b) Relation de dispersion $\omega = \Omega(\underline{k}) = N |\cos \theta|$ des ondes de gravité internes et détermination de l'angle θ_0 en fonction de ω_0 .

La vitesse de groupe $\underline{c}_g(\underline{k})$ d'un paquet d'ondes régies par une relation de dispersion quelconque $\omega = \Omega(\underline{k})$ est définie par la relation

$$\underline{c}_g(\underline{k}) = \underline{\text{grad}}_{\underline{k}} \Omega(\underline{k}) = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial k_1}, \frac{\partial \Omega}{\partial k_2}, \frac{\partial \Omega}{\partial k_3} \right). \quad (16)$$

Le milieu est "dispersif" car la vitesse de phase $\underline{c}_\varphi(\underline{k}) = \frac{\Omega(\underline{k})}{k} (\underline{k}/k)$ d'une onde plane de vecteur d'onde \underline{k} est différente de la vitesse de groupe d'un paquet d'ondes de vecteur d'onde \underline{k} . Dans l'espace des vecteurs d'onde $\underline{k} \in \mathbb{R}^3$, le champ de vitesses de groupe $\underline{c}_g(\underline{k})$ est orthogonal aux surfaces d'iso-pulsation ω (propriété du gradient).

Dans le cas de la relation de dispersion des ondes internes $\Omega(\underline{k}) = N |\cos \theta|$, la pulsation est indépendante du module k . Les iso- ω sont donc des cônes

passant par zéro. Par conséquent, on a $\underline{c}_g(\underline{k}) \cdot \underline{c}_\varphi(\underline{k}) = 0$: la vitesse de groupe est orthogonale au vecteur d'onde \underline{k} et donc à la vitesse de phase.

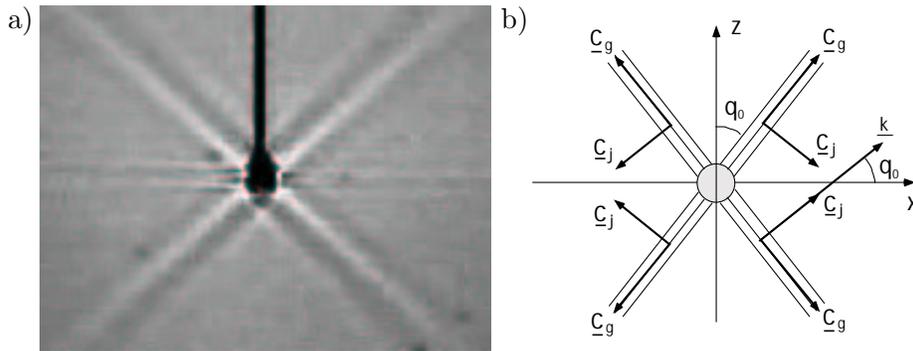


Figure 7: *Train d'ondes émis par un cylindre oscillant dans un fluide stratifié. La forme est celle d'une "croix de Saint-André". a) visualisation expérimentale (Photo Météo-France/CNRM et INPT/IMFT, 2003) b) positions respectives des vitesses de phase \underline{c}_φ et de groupe \underline{c}_g .*

On considère un obstacle animé d'un mouvement vertical oscillant de pulsation ω_0 . Pour simplifier, on se place dans le cas bidimensionnel (2D), ce qui revient à considérer un obstacle cylindrique d'axe Oy . Ce forçage va générer un paquet d'ondes oscillant à la pulsation $\omega = \omega_0$, et le train d'onde observé expérimentalement est visualisé sur la figure 7 par une "image de schlieren" (l'indice de réfraction de la lumière dépend de la masse volumique du fluide).

On observe que les quatre branches de la "croix de Saint-André" ont une épaisseur de l'ordre de la taille de l'obstacle et font, avec la verticale, les angles θ_0 ou $-\theta_0$ solutions de l'équation $\omega_0 = N |\cos \theta_0|$. Lorsque ω_0 croît de 0 à N , l'angle θ_0 décroît de $\pi/2$ à 0. Lorsque ω_0 est supérieur à N , aucune onde n'est visible loin de l'obstacle.

À partir de ces observations, on peut conjecturer le scénario suivant. Seuls les vecteurs d'onde $\underline{k} = (k_1, k_3)$ vérifiant $|k_1|/k = |\cos \theta_0|$, c'est-à-dire $\Omega(\underline{k}) = \omega_0$, sont excités par la source oscillante. Ces vecteurs sont sur deux droites faisant les angles $-\theta_0$ et $+\theta_0$ avec l'axe *horizontal*. L'énergie de ces ondes se propage à la vitesse de groupe, donc le long de droites faisant des angles $-\theta_0$ et θ_0 avec la *verticale*, comme observé expérimentalement. La figure 7 indique le sens des vitesses de phase \underline{c}_φ associées aux quatre vitesses de groupes pointant de l'obstacle vers l'infini.

Pour expliquer ces observations, on modélise le forçage oscillant par la fonction

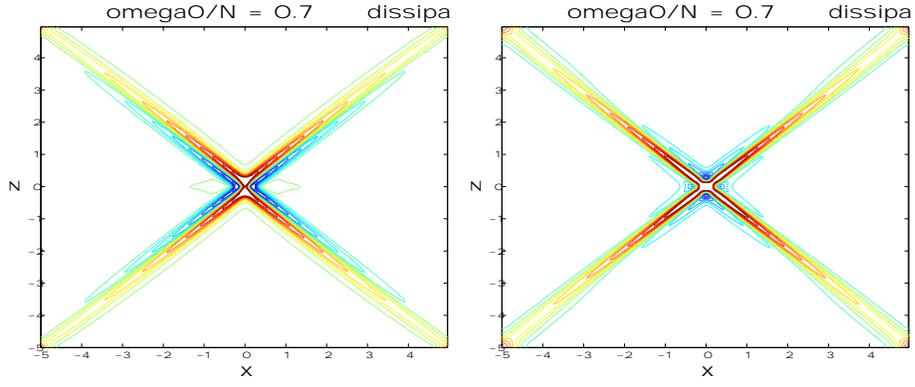


Figure 8: *Visualisation numérique simulant la croix de Saint-André générée par un obstacle oscillant à pulsation ω_0 . Champ de vitesse verticale à deux instants différents.*

$f(\underline{x})e^{-i\omega_0 t}$ que l'on décompose en modes de Fourier grâce à la relation

$$f(\underline{x}) = \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\underline{k}) e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}} dk_1 dk_3 . \quad (17)$$

L'introduction de ce forçage dans les équations du modèle, que l'on ne détaille pas ici (le principe a déjà été présenté dans le cas 1D), conduit à des solutions de la forme $u(\underline{x}, t) = e^{-i\omega_0 t} U(\underline{x})$ avec

$$\begin{aligned} U(\underline{x}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\hat{f}(\underline{k})}{-(\omega_0 + i\epsilon)^2 + \Omega^2(\underline{k})} e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}} dk_1 dk_3 \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \left[\int_0^{2\pi} \frac{\hat{f}(k \cos \theta, k \sin \theta)}{-(\omega_0 + i\epsilon)^2 + N^2 \cos^2 \theta} e^{i k(x \cos \theta + z \sin \theta)} d\theta \right] k dk . \end{aligned}$$

On peut alors effectuer un tracé graphique de cette fonction de manière approchée en choisissant un paramètre ϵ suffisamment petit. On obtient le tracé de la figure 8 qui confirme l'observation d'un sillage lointain en forme de croix de Saint-André. L'explication analytique de cette forme s'obtient en appliquant au cas particulier des ondes de gravité internes le formalisme présenté dans le cas général dans le paragraphe suivant.

2.2 Cas d'une relation de dispersion 2D quelconque

On considère maintenant un milieu dispersif 2D de relation de dispersion quelconque $\omega = \Omega(\underline{k}) = \Omega(k_1, k_2)$. Les solutions du problème linéaire décrivant le forçage des ondes par l'obstacle sont alors données par les expressions

$$u(\underline{x}, t) = \frac{1}{i} e^{-i\omega_0 t} \iint_S \frac{\hat{f}(\underline{k})}{-\omega_0 + \Omega(\underline{k})} e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}} dk_1 dk_2 \quad (18)$$

où S est une surface dans \mathcal{C}^2 qui évite la courbe des vecteurs d'onde complexes \underline{k} de \mathcal{C}^2 tels que $\Omega(\underline{k}) = \omega_0$. Dans l'espace réel, ces vecteurs d'onde forment une ou plusieurs courbes $\underline{k}(s)$ que l'on choisit de paramétrer par la ou les coordonnées curvilignes $s \in I$ où I est un intervalle de \mathbb{R} ou une réunion d'intervalles. On a donc $\Omega[\underline{k}(s)] = \omega_0$ pour $s \in I$.

Suivant la position de la surface complexe par rapport aux pôles de l'intégrande, les solutions diffèrent les unes des autres par des fonctions de la forme

$$2\pi \int_J \frac{\widehat{f}[\underline{k}(s)]}{c_g[\underline{k}(s)]} e^{i \underline{k}(s) \cdot \underline{x} - i \omega_0 t} ds \quad (19)$$

où $J \in I$ est un sous-intervalle de I , c_g est le module de la vitesse de groupe et où on a choisi le paramétrage $s \in I$ de la courbe de telle sorte que $(c_g, \frac{d}{ds} \underline{k})$ forment un repère (orthogonal) direct. Ce résultat (admis ici) s'obtient en généralisant le calcul de résidus déjà effectué dans le cas 1D et en utilisant, par exemple, la propriété $ds/c_g = dk_2 / \frac{\partial \Omega}{\partial k_1}$ du changement de variable de l'intégrale.

On peut ensuite ajouter à toutes ces solutions des ondes libres de la forme $u_m e^{i \underline{k} \cdot \underline{x} - i \Omega(\underline{k}) t}$. L'ajout d'une dissipation infinitésimale dans les équations permet d'éliminer les ondes libres en ne conservant que les ondes liées à l'obstacle.

On s'intéresse alors aux ondes émises dans une direction \underline{d} (avec \underline{d} unitaire) en choisissant $\underline{x} = X \underline{d}$ avec $X > 0$ tendant vers l'infini. En déformant la surface S dans la direction complexe $i \kappa \underline{d}$, on montre que l'intégrande dans l'expression d'une solution $u(\underline{x}, t)$ tend vers zéro quand X tend vers l'infini (bornée par une fonction en $1/X$). Cette opération n'est pas possible dans le voisinage des vecteurs d'onde de la courbe paramétrée $\underline{k}(s)$ définie par $\Omega[\underline{k}(s)] = \omega_0$.

L'expression de la solution dans la limite où $\underline{x} = X \underline{d}$ est suffisamment loin de l'obstacle est donc

$$u(\underline{x}, t) \sim 2\pi \int_{J_d} \frac{\widehat{f}[\underline{k}(s)]}{c_g[\underline{k}(s)]} e^{i \underline{k}(s) \cdot \underline{x} - i \omega_0 t} ds \quad (20)$$

où $J_d \in I$ est le sous-intervalle de I associé à la direction \underline{d} décrivant l'ensemble des pôles de la courbe $\underline{k}(s)$ qui résistent à l'introduction d'une dissipation ϵ infinitésimale. Pour déterminer J_d , on procède comme dans le cas 1D pour constater que seuls les vecteurs d'onde \underline{k} tels que $\underline{c}_g(\underline{k}) \cdot \underline{d} > 0$ contribuent à l'expression de la solution dans la direction \underline{d} .

Un développement asymptotique supplémentaire peut être fait à partir de cette expression en appliquant la méthode de la phase stationnaire qui étudie

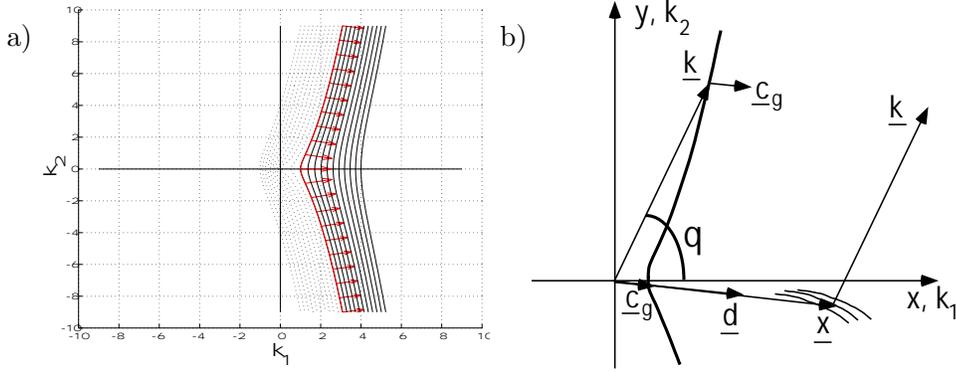


Figure 9: a) Exemple de courbes d'isovaleurs d'une fonction $\Omega(\underline{k})$ dans le plan (k_1, k_2) . Vecteurs vitesse de groupe $\underline{c}_g(\underline{k})$ sur une courbe $\Omega(\underline{k}) = \omega_0$. b) Le paquet d'ondes \underline{k} atteint le point \underline{x} situés sur la demi-droite engendrée par sa vitesse de groupe $\underline{c}_g(\underline{k})$.

le comportement asymptotique de l'intégrale $E(X) = \int_{J_{\underline{d}}} G(s) \exp[i\psi(s)X] ds$ pour X grand. Cette méthode, détaillée par exemple dans l'ouvrage "Advanced mathematical methods for scientists and engineers", M. Bender et S. A. Orszag, Mc Graw-Hill 1978, indique que le comportement de l'intégrale dépend uniquement du voisinage des points où la phase ψ est extrémale. On pose donc ici

$$G(s) = 2\pi e^{-i\omega_0 t} \frac{\widehat{f}[\underline{k}(s)]}{c_g[\underline{k}(s)]} \quad \text{et} \quad \psi(s) = \underline{k}(s) \cdot \underline{d}. \quad (21)$$

Pour X grand, toute la contribution de l'intégrale provient du voisinage des valeurs $s = s_n$ tels que $\psi'(s_n) = \underline{d} \cdot \frac{d}{ds} \underline{k}(s_n) = 0$. Ces valeurs sont atteintes lorsque $\underline{c}_g[\underline{k}(s)]$ est parallèle à \underline{d} car $\underline{c}_g[\underline{k}(s)] \cdot \frac{d}{ds} \underline{k}(s) = 0$. Cette condition détermine zéro, une ou plusieurs valeurs de $\underline{k}(s_n)$, avec $s_n \in I_{\underline{d}}$ sur la courbe $\underline{k}(s)$. Il faut de plus que $\underline{c}_g[\underline{k}(s_d)]$ et \underline{d} soit dans le même sens pour que s_n soit bien dans $J_{\underline{d}}$. Le résultat de cette application de la méthode de la phase stationnaire (admis ici) conduit au comportement

$$u(X\underline{d}, t) \sim 2\pi \sum_{s_n \in I_{\underline{d}}} \sqrt{\frac{2\pi}{|B(s_n)|X}} \frac{\widehat{f}[\underline{k}(s_n)]}{c_g[\underline{k}(s_n)]} e^{iX\underline{k}(s_n) \cdot \underline{d} - i\omega_0 t + i\mu(s_n)\pi/4} \quad (22)$$

où $B(s)$ est la courbure de la courbe $\underline{k}(s)$ et $\mu(s)$ son signe (1 si B est positif, -1 sinon). La courbure est définie par $\frac{d^2}{ds^2} \underline{k}(s) = -B(s) \underline{n}(s)$ où $\underline{n}(s)$ est la normale à la courbe $\underline{k}(s)$, proportionnelle à $\frac{d}{ds} \underline{k}(s)$ et de même sens. Lorsque $I_{\underline{d}}$ est vide (aucun $\underline{c}_g[\underline{k}(s)]$ parallèle à \underline{d} et dans le même sens) la solution $u(X\underline{d}, t)$ décroît exponentiellement avec la distance X .

Loin de l'obstacle et dans la direction \underline{d} , on trouve donc, lorsqu'ils existent, les paquets d'ondes dont la vitesse de groupe est parallèle et dans le même sens que \underline{d} . L'amplitude de ces paquets d'ondes décroît comme $1/\sqrt{X}$ où X est la distance à partir de l'obstacle. Si aucun paquet d'ondes ne répond à cette définition, la solution décroît exponentiellement. Les autres solutions correspondent à des ondes libres et le calcul précédent permet de les distinguer des ondes liées à l'obstacle. On peut expliquer ces résultats en disant que les ondes liées interfèrent de manière destructive pour ne laisser subsister que les paquets d'ondes ayant la vitesse de groupe adéquate.

2.3 Lignes de phase et caustiques

Nous avons vu que le train d'ondes émis par un obstacle ponctuel (ou considéré comme tel suffisamment loin) et oscillant à la pulsation ω_0 se ramenait à l'étude géométrique des courbes $\omega = \Omega(\underline{k})$ orthogonales aux lignes de champs de $\underline{c}_g(\underline{k}) = \text{grad}_{\underline{k}}\Omega(\underline{k})$ dans le plan $\underline{k} \in \mathbb{R}^2$.

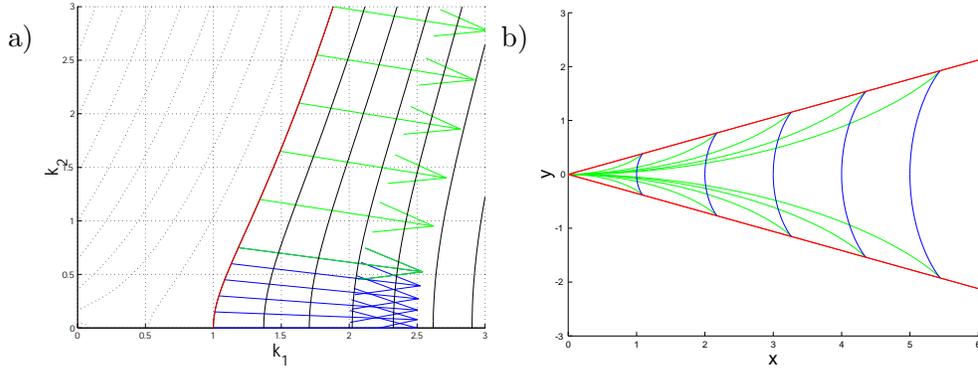


Figure 10: (a) Courbe $\Omega(\underline{k}) = \sqrt{gk} - V k_1 = 0$ dans le plan (k_1, k_2) , (b) Familles de lignes de phase dans le plan (x, y) .

Dans l'espace physique, les lignes de constante phase ϕ de la solution $u(\underline{x}, t)$, notées \mathcal{L}_ϕ , sont le lieu des points $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ tels que $\underline{k} \cdot \underline{x} = \phi$ où \underline{k} est tel que $\omega_0 = \Omega(\underline{k})$ avec $\underline{c}_g(\underline{k})$ parallèle à \underline{x} et dans le même sens. On a donc

$$\mathcal{L}_\phi = \left\{ \underline{x} : \Omega(\underline{k}) = \omega_0, \underline{k} \cdot \underline{x} = \phi, \underline{c}_g(\underline{k}) \wedge \underline{x} = \underline{0} \text{ et } \underline{c}_g(\underline{k}) \cdot \underline{x} > 0 \right\}. \quad (23)$$

Pour tracer ces lignes, on peut choisir de les paramétrer par l'angle θ défini par $\underline{k} = k (\cos \theta \underline{e}^{(1)} + \sin \theta \underline{e}^{(2)})$. On note alors $\underline{k} = \underline{\mathcal{K}}(\theta)$ une branche de solutions de l'équation implicite $\Omega(\underline{k}) = \omega_0$. La courbe paramétrée $\underline{x}(\theta)$ s'écrit alors

$$\underline{x}(\theta) = \frac{\phi}{\underline{\mathcal{K}}(\theta) \cdot \underline{c}_g[\underline{\mathcal{K}}(\theta)]} \underline{c}_g[\underline{\mathcal{K}}(\theta)]. \quad (24)$$

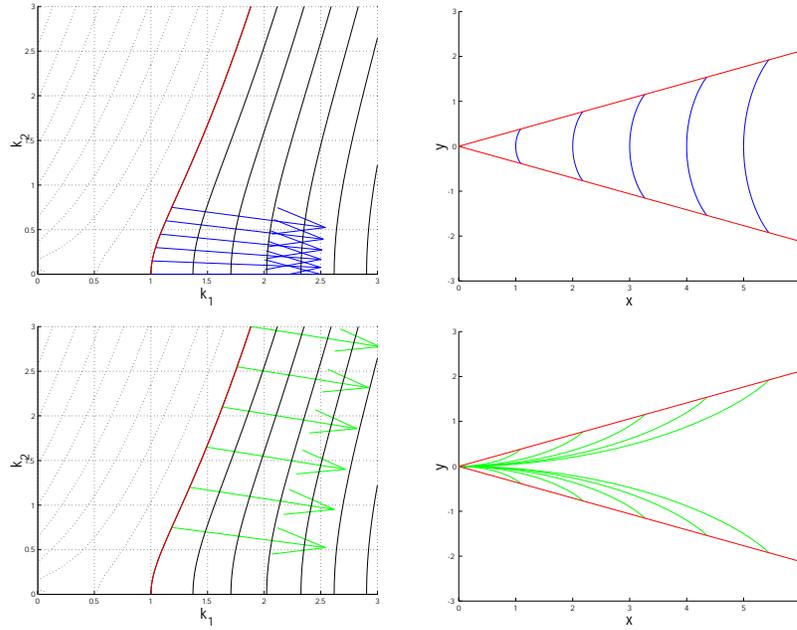


Figure 11: *Correspondance entre (gauche) portions de la courbe $\Omega(\underline{k}) = 0$ et (droite) familles de lignes de phase associees.*

En effet, les orientations des vecteurs $\underline{x}(\theta)$ et $\underline{c}_g[\underline{K}(\theta)]$ sont bien les mêmes et on a bien $\underline{x}(\theta) \cdot \underline{K}(\theta) = \phi$.

Pour l'exemple de la relation de dispersion $\Omega(\underline{k}) = \sqrt{gk} - V k_1$ avec $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ dans le cas $\omega_0 = 0$, qui intervient pour décrire le sillage d'un bateau en eaux profondes, cette expression conduit à la courbe paramétrée

$$x(\theta) = \frac{V^2 \phi}{g} \cos \theta (1 + \sin^2 \theta) \quad \text{et} \quad y(\theta) = \frac{V^2 \phi}{g} \cos^2 \theta \sin \theta \quad (25)$$

pour $\theta \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$. La courbe $\Omega(\underline{k}) = 0$ et les lignes de phase correspondantes sont représentées sur les figures 10 et 11.

Dans le cas général, on considère la courbe paramétrée $\underline{k}(s), s \in I$, définie par $\Omega[\underline{k}(s)] = \omega_0$. On peut s'intéresser à l'ensemble des directions \underline{d} (vecteurs normés) balayées par le vecteur $\underline{c}_g[\underline{k}(s)], s \in I$. Si toutes les directions ne sont pas atteintes, cet ensemble forme un secteur dans le plan physique délimité par deux directions extrêmes \underline{d}_1 et \underline{d}_2 . À l'intérieur de ce secteur, la solution décroît en $X^{-1/2}$ où X est la distance à l'obstacle. À l'extérieur de ce secteur, la solution décroît exponentiellement. Les deux demi-droites frontières engendrées par les deux directions séparent la région "d'ombre" (pas d'ondes visibles) de la région "illuminée" (ondes d'amplitudes significatives).

Ces demi-droites sont des caustiques car elles délimitent une région où deux rayons se superposent d'une région où aucun rayon ne pénètre. En effet, les directions \underline{d}_1 et \underline{d}_2 correspondent à des points $s \in \{s_1, s_2\}$ de la courbe $\underline{k}(s)$ tels que $\frac{d}{ds} \underline{c}_g[\underline{k}(s)] = \underline{0}$ ou encore $\frac{d^2}{ds^2} \underline{k}(s) = 0$. Ces points sont tels que la courbure $B(s)$ est nulle. À une direction \underline{d} voisine de \underline{d}_1 correspondent zéro ou deux valeurs de s dans le voisinage de s_1 suivant que \underline{d} pointe vers le secteur illuminé ou son complémentaire. En appliquant une méthode de la phase stationnaire spécifique à ce cas dégénéré, on montre que la solution décroît comme $X^{-1/3}$ le long de ces caustiques. Pour le sillage lointain, l'amplitude des ondes est donc maximale le long de ces caustiques. En effectuant des développements asymptotiques que l'on ne décrit pas ici, on montre que la connection entre les zones d'ombre et de lumière est décrite par une fonction d'Airy dans la direction transverse de la caustique.

3 Obstacle oscillant ou mobile

On s'intéresse ici au sillage lointain d'un obstacle pouvant non seulement osciller à la pulsation ω_0 mais aussi se mouvoir à la vitesse $-\underline{V}$ dans un milieu 1D ou 2D initialement au repos. La généralisation au cas 3D n'est pas abordée ici, mais elle ne pose pas de difficulté particulière. Si la relation de dispersion de ce milieu est $\omega_i = \Omega_i(\underline{k})$, un changement de variable se plaçant dans le repère lié à l'obstacle permet de se ramener au cas oscillant sans mouvement à condition de considérer la nouvelle relation de dispersion $\omega = \Omega(\underline{k}) = \Omega_i(\underline{k}) + \underline{V} \cdot \underline{k}$. En utilisant les résultats des paragraphes précédents, on examine alors l'exemple du sillage d'ondes sonores ou d'ondes de surface en milieu très profond en traitant le cas 1D puis le cas 2D. Le cas où l'obstacle est mobile mais n'oscille pas est obtenu tout simplement en posant $\omega_0 = 0$.

3.1 Changement de variable dans le repère mobile

On considère tout d'abord l'exemple de l'équation des ondes bidimensionnelle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (26)$$

Lorsque cette équation décrit des ondes sonores, le champ $u(x, y, t)$ représente les fluctuations de pression du fluide ou le potentiel des vitesses et la constante c est la vitesse du son. Lorsque cette équation décrit des ondes de surface en milieu peu profond, u désigne l'élévation de la surface libre et la vitesse de ces ondes est $c = \sqrt{gh}$ où g est la gravité et h la profondeur.

La relation de dispersion de cette équation des ondes 2D est donnée par l'équation $\omega^2 = c^2 k^2$ avec $k = \|\underline{k}\| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$, ce qui conduit à $\omega = \Omega(\underline{k}) = c k$ en adoptant la convention $\omega \geq 0$ qui provient de la symétrie $(\underline{k}, \omega) \rightarrow (-\underline{k}, -\omega)$ existant pour le cas des solutions réelles.

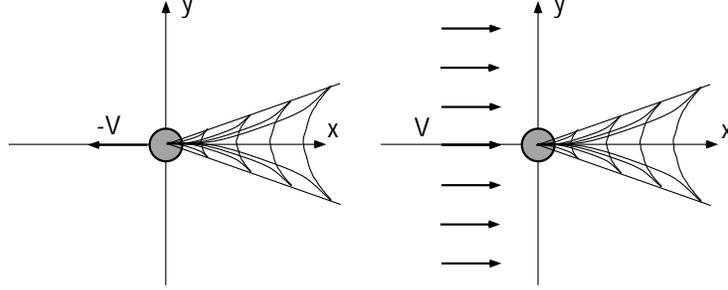


Figure 12: *Équivalence du sillage d'un obstacle (a) mobile de vitesse $-V$ dans un milieu ou (b) immobile dans un milieu de vitesse V .*

On considère un obstacle oscillant à la pulsation ω_0 et animé d'une vitesse $-\underline{V}$. On note $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})$ la fonction décrivant le champ d'ondes dans le repère fixe, les variables d'espace et de temps y étant notées (\tilde{x}, \tilde{t}) . On modélise cet obstacle par la partie réelle du forçage complexe $f(\tilde{x} + \underline{V} \tilde{t}) e^{-i\omega_0 \tilde{t}}$ et le champ d'ondes par la partie réelle des solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2} - c^2 \tilde{\Delta} \tilde{u} = f(\tilde{x} + \underline{V} \tilde{t}) e^{-i\omega_0 \tilde{t}}, \quad (27)$$

avec $\tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2}$. On effectue alors un changement de repère en supposant que l'obstacle est fixe et que le fluide est animé de la vitesse \underline{V} . Cette transformation se traduit donc par le changement de variable $(\underline{x}, t) = (\tilde{x} + \underline{V} \tilde{t}, \tilde{t})$ qui entraîne $\left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}}, \frac{\partial}{\partial \underline{y}}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}, \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \underline{V} \cdot \underline{\text{grad}}\right)$. Les équations dans ce nouveau repère sont alors

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{V} \cdot \underline{\text{grad}}\right)^2 u - c^2 \Delta u = f(\underline{x}) e^{-i\omega_0 t}. \quad (28)$$

Choisissons le système d'axes (x, y) de telle sorte que $\underline{V} = V \underline{e}^{(1)}$. L'équation s'écrit alors

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = f(x, y) e^{-i\omega_0 t}. \quad (29)$$

La relation de dispersion de cette nouvelle équation (en l'absence de forçage) est donnée par l'équation $(\omega - V k_1)^2 = c^2 k^2$ qui conduit aux relations

dispersion $\omega = \Omega_+(\underline{k}) = c k + V k_1$ avec $k_1 \geq -(c/V) k$ et $\omega = \Omega_-(\underline{k}) = -c k + V k_1$ pour $k_1 \geq (c/V) k$, dont les domaines de définition sont, a priori, restreints par la convention $\omega \geq 0$.

Dans le cas général, on considère un milieu dont la dispersion des ondes monochromatiques $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) = u_m e^{i \underline{k} \cdot \tilde{x} - i \omega_i \tilde{t}}$ est donnée par les L relations “intrinsèques” $\omega_i = \Omega_{i,l}(\underline{k})$ avec $l \in L$, la convention $\omega_i \geq 0$ n’étant pas adoptée pour ce repère fixe. Dans le repère mobile animé d’une vitesse $-\underline{V}$, le changement de variable $(\underline{x}, t) = (\tilde{x} + \underline{V} \tilde{t}, \tilde{t})$ conduit à des ondes monochromatiques $u(x, y) = u_m e^{i \underline{k} \cdot \underline{x} - i \omega t}$ avec les relations de dispersion $\omega = \Omega_l(\underline{k}) = \Omega_{i,l}(\underline{k}) + \underline{V} \cdot \underline{k}$. On peut alors appliquer la convention $\omega \geq 0$ pour ces nouvelles relations de dispersion représentatives du milieu dans le repère mobile. Notons que l’on pourrait appliquer la convention $\omega_i \geq 0$ dans le repère intrinsèque (fixe), à condition de ne pas appliquer la convention $\omega \geq 0$ pour les nouvelles relations de dispersion. Dans cette présentation, nous préférons considérer les relations $\Omega_l(\underline{k})$ comme des relations de dispersion quelconques et donc y appliquer la convention $\omega \geq 0$.

3.2 Exemple des ondes sonores

Pour fixer les idées, nous supposons que l’équation des ondes forcée par l’obstacle oscillant (à la pulsation ω_0) et mobile (à la vitesse $-\underline{V} = -V \underline{e}^{(1)}$) décrit des ondes sonores 1D ou 2D. On appellera alors “nombre de Mach” la constante $M = V/c$. On qualifiera de “subsonique” la situation $M < 1$ et de “supersonique” la situation $M > 1$. Pour transposer la discussion au cas des ondes de surface en milieu peu profond, il suffit d’appeler nombre de Froude la constante $F = V/c = V/\sqrt{g h}$ et d’appeler respectivement “sous-critique” et “super-critique” les cas $F < 1$ et $F > 1$.

La relation de dispersion dans le repère mobile lié à l’obstacle est donc constituée des relations $\omega = \Omega_+(\underline{k}) = c k + V k_1$ et $\omega = \Omega_-(\underline{k}) = -c k + V k_1$ et on adopte la convention $\omega \geq 0$ en ne gardant que les vecteurs d’onde tels que $\Omega_+(\underline{k}) \geq 0$ pour la première relation, ou $\Omega_-(\underline{k}) \geq 0$ pour la deuxième. Grâce à cette convention, on peut considérer que la pulsation ω_0 de l’obstacle est positive.

Dans le cas unidimensionnel (1D), les relations de dispersion à étudier sont $\omega = \Omega_+(k_1) = c k + V k_1$ et $\omega = \Omega_-(k_1) = -c k + V k_1$ avec $k = |k_1|$. En notant $M = V/c$ le nombre de Mach, ces relations de dispersion s’écrivent $\omega/c = W_+(k_1) = k + M k_1$ et $\omega/c = W_-(k_1) = -k + M k_1$. En appliquant la convention $\omega \geq 0$ aux deux relations de dispersion, on obtient les courbes représentées sur les figures 13 et 14, en distinguant le cas subsonique $M < 1$ du cas supersonique $M > 1$.

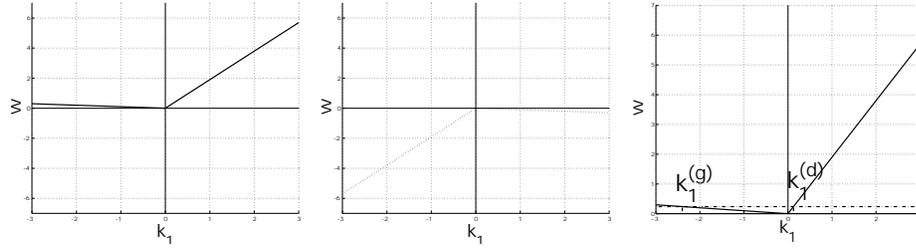


Figure 13: *Cas subsonique* $M < 1$. *Relations de dispersion 1D dans le repère de l'obstacle avec la convention $\omega \geq 0$ (pointillés).* (a) $W_+(k_1) = k + M k_1$ (b) $W_-(k_1) = -k + M k_1$. (c) *Intersections de W_+ et W_- avec $\omega/c = \omega_0/c$.*

- Dans le cas subsonique $M < 1$, il existe deux vecteurs d'onde $k_1^{(g)} < 0 < k_1^{(d)}$ solutions de $W_+(k_1) = \omega_0/c$ (figure 13) c'est-à-dire $\Omega_+(k_1) = \omega_0$. La vitesse de groupe est positive pour $k_1^{(d)}$ et négative pour $k_1^{(g)}$. D'autre part, la longueur d'onde associée à $k_1^{(g)}$ est plus petite que celle associée à $k_1^{(d)}$ dans la mesure où $|k_1^{(g)}| > |k_1^{(d)}|$. Un observateur (auditeur) immobile dans le repère fixe entendra un son plus aigu avant le passage de l'obstacle oscillant qu'après (effet Doppler).

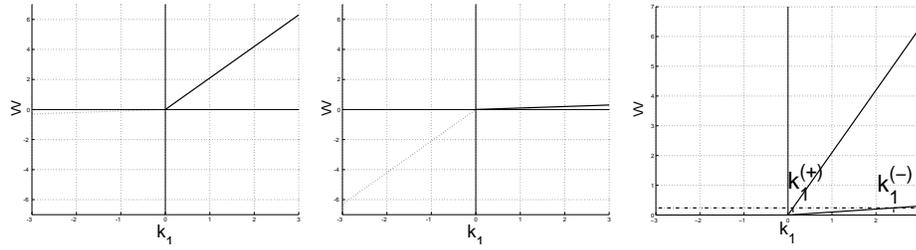


Figure 14: *Idem dans le cas supersonique* $M > 1$.

- Dans le cas supersonique $M > 1$, il existe deux vecteurs d'onde $0 < k_1^{(+)} < k_1^{(-)}$ solutions de $W_{\pm}(k_1) = \omega_0/c$ (figure 14) c'est-à-dire $\Omega_{\pm}(k_1) = \omega_0$. La vitesse de groupe est positive pour ces deux vecteurs d'onde. Il n'y a donc pas de son en amont du véhicule supersonique et un observateur entend deux notes distinctes en même temps après le passage du véhicule.

Dans le cas bidimensionnel (2D), les relations de dispersion à étudier sont $\omega = \Omega_+(k_1, k_2) = c k + V k_1$ et $\omega = \Omega_-(k_1, k_2) = -c k + V k_1$ avec $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$.

En notant $M = V/c$ le nombre de Mach, ces relations de dispersion s'écrivent $\omega/c = W_+(k_1, k_2) = k + M k_1$ et $\omega/c = W_-(k_1, k_2) = -k + M k_1$.

En appliquant la convention $\omega \geq 0$ aux deux relations de dispersion, on obtient les courbes iso- ω représentées sur les figures 15 et 16. Dans le cas subsonique, la courbe $\omega = \omega_0$ est une ellipse et l'obstacle rayonne dans toutes les directions. Dans le cas supersonique, les deux courbes $\omega = \omega_0$ sont des hyperboles et le son est émis dans un secteur faisant un angle $\alpha_s(M) = \arcsin(1/M) = \arctg(1/\sqrt{M^2 - 1})$. Cet angle s'appelle l'angle de Mach.

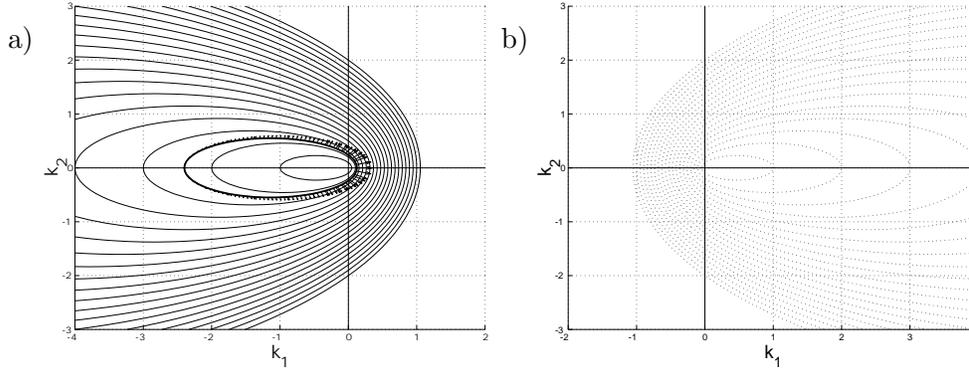


Figure 15: Cas subsonique $M = 0.9 < 1$. Courbes iso- ω des relations de dispersion 2D adimensionnelles dans le repère de l'obstacle : (a) $W_+(k_1, k_2) = k + M k_1$, (b) $W_-(k_1, k_2) = -k + M k_1$. La courbe $\omega = \omega_0$ avec $\omega_0/c = .24$ est représentée avec les vitesses de groupe associées. La convention $\omega \geq 0$ est indiquée par le tracé en pointillés des courbes que l'on peut ignorer.

- Dans le cas subsonique, la limite $\omega_0 = 0$ ne correspond à aucune émission d'onde (figure 15). On peut expliquer cette situation en considérant que l'équation stationnaire du modèle s'écrit dans ce cas

$$(c^2 - V^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y). \quad (30)$$

Cette équation aux dérivées partielles est elliptique et on peut la ramener à une équation de Laplace forcée ($\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f$) par un changement de variable. Pour se représenter le champ u généré par l'obstacle mobile, on peut, par exemple, faire une analogie avec le potentiel électrique généré par une densité de charge f . Le champ électrique, qui est le gradient de ce potentiel, décroît alors comme $1/X$ où X est la distance à l'obstacle (support des charges électriques). Dans le cas des ondes sonores, u représente par exemple le potentiel des vitesses.

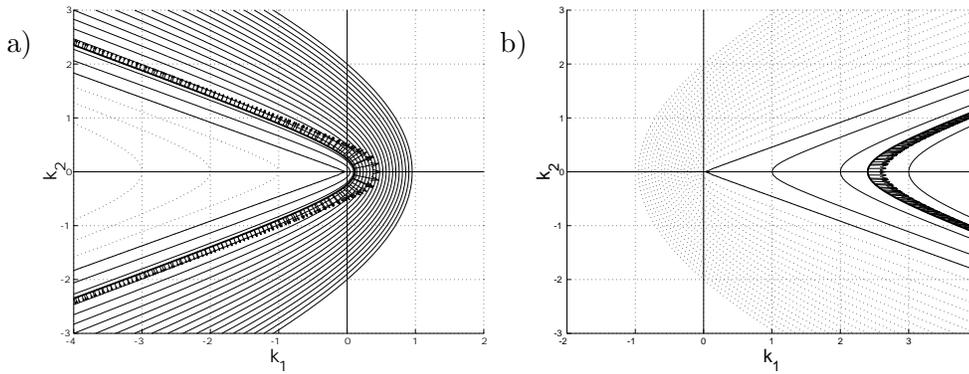


Figure 16: *Idem dans le cas supersonique $M = 1.1 > 1$.*

Son gradient est alors le champ de vitesse dont le module décroît donc comme $1/X$.

- Dans le cas supersonique, la limite $\omega_0 = 0$ est représentée sur la figure 17. On voit que les deux courbes des vecteurs d'onde \underline{k} liés à l'obstacle sont symétriques par rapport à la symétrie point $\underline{k} \rightarrow -\underline{k}$. Mais les vitesses de groupe n'obéissent pas à cette symétrie et pointent uniquement vers l'aval et dans deux directions faisant un angle secteur d'angle $\alpha_s(M) = \arcsin(1/M)$. Le sillage sonore est concentré sur deux rayons. On peut expliquer cette situation en considérant que l'équation stationnaire du modèle s'écrit dans ce cas

$$(V^2 - c^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) . \quad (31)$$

Cette équation aux dérivées partielles est “hyperbolique” et on peut même la ramener à une équation des ondes en (x, y) forcée $(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f)$ par un changement de variable. En interprétant x comme une variable de temps, les perturbations générées par l'obstacle se propagent avec les “vitesses” $\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \sqrt{M^2 - 1}$. Dans le cadre de la “théorie des caractéristiques” des équations aux dérivées partielles hyperboliques, l'information témoignant de la présence de l'obstacle se propage vers l'aval ($x \rightarrow \infty$), le long des droites caractéristiques, l'information provenant de l'amont ($x \rightarrow -\infty$) étant celle d'un état uniforme.

3.3 Exemple des ondes de surface en milieu profond

La relation de dispersion des ondes de surface en profondeur infinie s'écrit $\omega = \Omega_i(\underline{k}) = \sqrt{gk}$ avec $k = \|\underline{k}\|$. La convention $\omega \geq 0$ a été utilisée pour

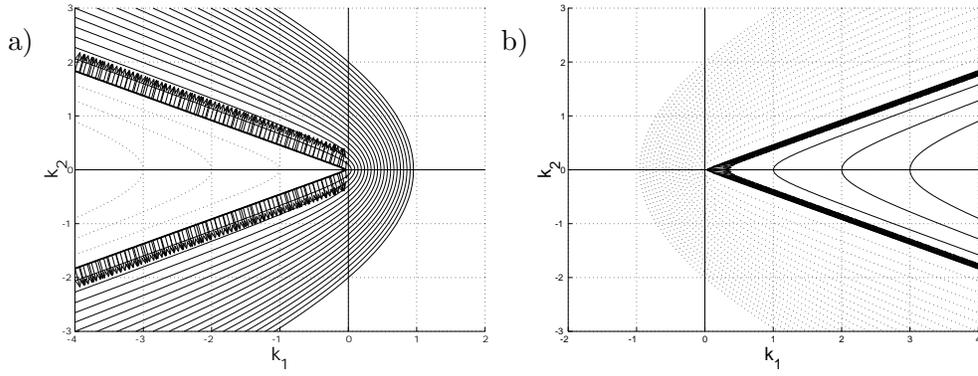


Figure 17: *Idem dans le cas supersonique $M = 1.1 > 1$ avec $\omega_0 = 0$.*

écrire cette relation de dispersion, et la symétrie $(\underline{k}, \omega) \rightarrow (-\underline{k}, -\omega)$ permet de considérer des pulsations négatives si nécessaire.

On considère un obstacle oscillant à une fréquence ω_0 et animé d'une vitesse $-V \underline{e}^{(1)}$. On cherche à déterminer le train d'onde émis.

La relation de dispersion dans le repère mobile lié à l'obstacle est constituée des relations $\omega = \Omega_+(\underline{k}) = \sqrt{gk} + V k_1$ et $\omega = \Omega_-(\underline{k}) = -\sqrt{gk} + V k_1$. Pour chacune de ces relations de dispersion, on peut appliquer la convention $\omega \geq 0$ en ne gardant que les vecteurs d'onde tels que $\Omega_+(\underline{k}) \geq 0$ pour la première relation, ou $\Omega_-(\underline{k}) \geq 0$ pour la deuxième. Grâce à cette convention, on peut considérer que la pulsation ω_0 de l'obstacle est positive.

Une autre méthode aurait consisté à conserver uniquement la relation de dispersion $\Omega_+(\underline{k})$ mais sans lui appliquer la convention $\omega \geq 0$. Il aurait alors fallu considérer que l'obstacle oscillait aux pulsations ω_0 et $-\omega_0$.

Dans le cas unidimensionnel (1D), les relations de dispersion à étudier sont $\omega = \Omega_+(k_1) = \sqrt{gk} + V k_1$ et $\omega = \Omega_-(k_1) = -\sqrt{gk} + V k_1$ avec $k = |k_1|$. En posant $K_1 = \frac{V^2}{g} k_1$, ces relations de dispersion s'écrivent $\omega/A = W_+(K_1) = \sqrt{K} + K_1$ et $\omega/A = W_-(K_1) = -\sqrt{K} + K_1$ avec $K = |K_1|$ et $A = g/V$. La constante A a la dimension d'une pulsation et W_+ et W_- sont les relations de dispersion adimensionnées.

En appliquant la convention $\omega \geq 0$ aux deux relations de dispersion, on obtient les courbes représentées sur la figure 18. On remarque que pour $K_1 \geq 1$, il existe deux pulsations positives, une pour $W_+(K_1)$ et une pour $W_-(K_1)$. Les solutions de $W_{\pm}(K_1) = \omega_0/A$, c'est-à-dire $\Omega_{\pm}(k_1) = \omega_0$, obéissent à la discussion suivante :

- Pour $\omega_0 > A/4 = V/4g$, il existe deux vecteurs d'onde $k_1^{(a)} < k_1^{(b)}$ posi-

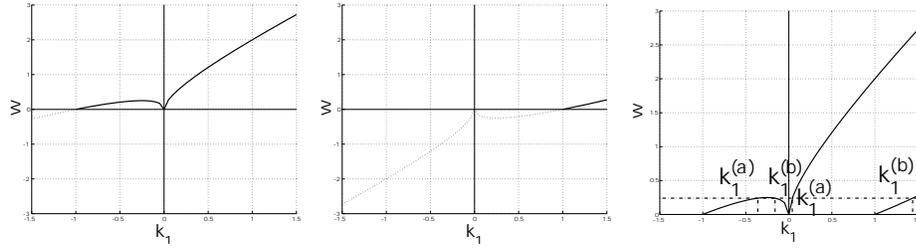


Figure 18: Relations de dispersion adimensionnelle 1D dans le repère de l'obstacle (a) $W_+(K_1) = \sqrt{K} + K_1$, (b) $W_-(K_1) = -\sqrt{K} + K_1$, (c) $W_+(K_1)$ et $W_-(K_1)$ sur le même graphe et intersection avec la droite $\omega = \omega_0$ avec $\omega_0/A = .24$. La convention $\omega \geq 0$ est indiquée par le tracé en pointillés des courbes que l'on peut ignorer.

tifs solutions. La vitesse de groupe est positive pour ces deux vecteurs. Le sillage est donc situé en aval de l'obstacle.

- Pour $\omega_0 < A/4 = V/4g$, il existe quatre vecteurs d'onde $k_1^{(\alpha)} < k_1^{(\beta)} < 0 < k_1^{(a)} < k_1^{(b)}$ solutions. La vitesse de groupe est négative pour $k_1^{(\beta)}$ et positive pour les autres ondes. Le sillage en aval de l'obstacle est caractérisé par les vecteurs d'onde $k_1^{(\alpha)} < 0 < k_1^{(a)} < k_1^{(b)}$ et le sillage en amont par le vecteur d'onde $k_1^{(\beta)} < 0$.

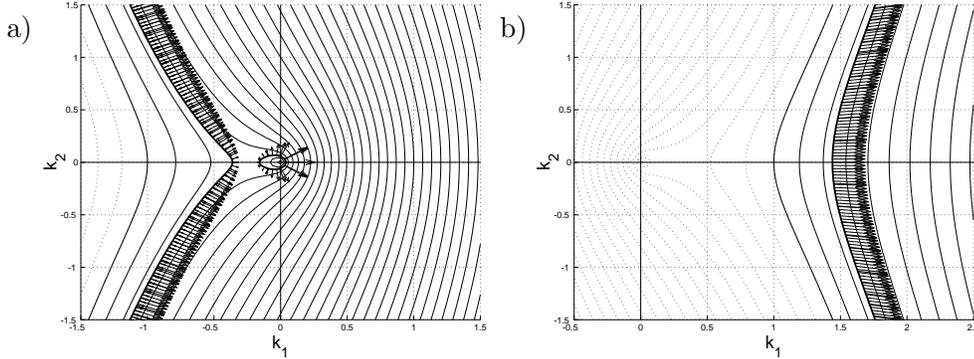


Figure 19: Courbes iso- ω des relations de dispersion 2D adimensionnelle dans le repère de l'obstacle : (a) $W_+(K_1, K_2) = \sqrt{K} + K_1$, (b) $W_-(K_1, K_2) = -\sqrt{K} + K_1$. Les courbes $\omega = \omega_0$ avec $\omega_0/A = .24$ sont représentées avec les vitesses de groupe associées. La convention $\omega \geq 0$ est indiquée par le tracé en pointillés des courbes que l'on peut ignorer.

Dans le cas bidimensionnel, les relations de dispersion à étudier sont $\omega = \Omega_+(k_1, k_2) = \sqrt{gk} + V k_1$ et $\omega = \Omega_-(k_1, k_2) = -\sqrt{gk} + V k_1$. En posant $K_1 =$

$\frac{V^2}{g}k_1, K_2 = \frac{V^2}{g}k_2$, ces relations de dispersion s'écrivent $\omega/A = W_+(K_1, K_2) = \sqrt{K} + K_1$ et $\omega/A = W_-(K_1, K_2) = -\sqrt{K} + K_1$ avec $K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$ et $A = V/g$.

En appliquant la convention $\omega \geq 0$ aux deux relations de dispersion, on obtient les courbes iso- ω représentées sur la figure 19. On remarque qu'il existe toute une région du plan (sur la droite) pour laquelle il existe deux pulsations positives, une pour $W_+(K_1)$ et une pour $W_-(K_1)$.

Pour $\omega_0 < A/4 = V/4g$, il existe trois courbes vérifiant $\omega = \omega_0$. Celle qui entoure $\underline{k} = \underline{0}$ émet des ondes dans toutes les directions. La courbe $\Omega_+(\underline{k}) = \omega_0$ situé à gauche ($k_1 < 0$) comporte deux points d'inflexion symétriques et émet donc des ondes dans un secteur d'angle fini à l'aval de l'obstacle. La courbe $\Omega_-(\underline{k}) = \omega_0$ située à droite ($k_1 > 0$) comporte aussi deux points d'inflexion et émet dans un section d'angle fini à l'aval. Les deux angles des deux secteurs ne sont pas forcément égaux.

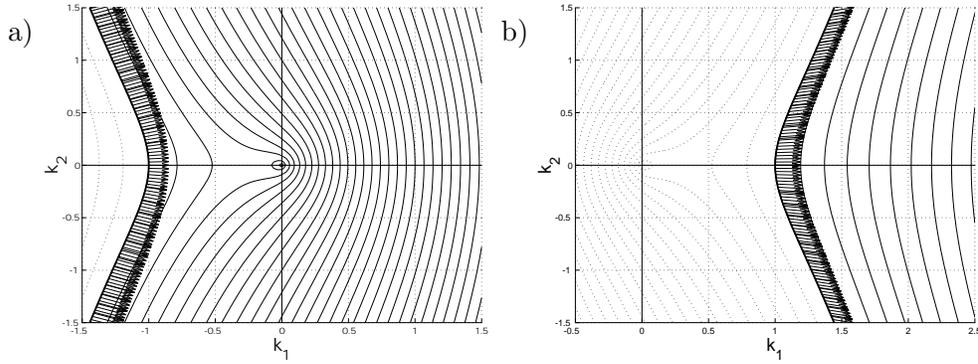


Figure 20: *Idem dans le cas $\omega_0 = 0$.*

Le cas limite $\omega_0 = 0$ est représenté sur la figure 20. On voit que les deux courbes des vecteurs d'onde \underline{k} liés à l'obstacle sont symétriques pour la symétrie point $\underline{k} \rightarrow -\underline{k}$. Les vitesses de groupe pointent uniquement dans les directions délimitées par le secteur de demi-angle $\beta_s = \arcsin(1/3) \sim 19.5^\circ$.

Dans le cas $\omega_0 = 0$, l'intégrale (18) prend la même valeur pour $\Omega(\underline{k}) = \Omega_+(\underline{k})$ et $\Omega(\underline{k}) = \Omega_-(\underline{k})$. Sa visualisation numérique, présentée sur la figure 21a, est consistante avec les lignes de phase (25), reproduites sur la figure 21b. La figure 22 confirme que cette modélisation linéaire explique bien un phénomène réel.

On peut donc affirmer que les ondes émises sont stationnaires. En tout point du sillage, le signal est le résultat d'une onde à droite et d'une onde à gauche de même amplitude dans la mesure où la forme de l'obstacle est réelle. En

revanche, les ondes émises dans le cas ω_0 non nul sont propagatives.

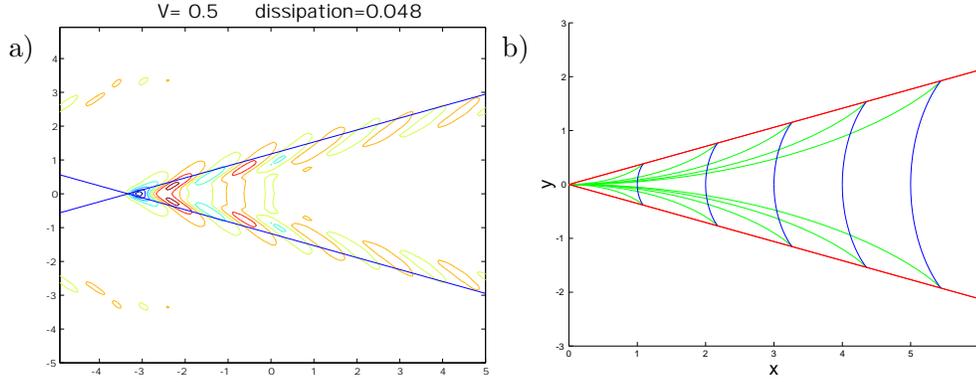


Figure 21: a) Visualisation numérique de la solution $u(x,y)$ constituant le sillage d'un bateau en eau très profondes. b) Courbes isophasse déterminées analytiquement.

L'exemple du sillage d'un obstacle mobile ($\omega_0 = 0$) des ondes de surface est un cas particulier de la famille des relations de dispersion 2D isotropes $\Omega_i(\underline{k}) = \Omega_i(k)$ vérifiant la relation $c_{gi}(k) = \lambda c_{\varphi i}(k)$ où λ est une constante, $c_{gi}(k) = \Omega'_i(k)$ et $c_{\varphi i}(k) = \Omega_i(k)/k$. En effet, on a $\lambda = \frac{1}{2}$ pour la relation de dispersion $\Omega_i(k) = \sqrt{gk}$ des ondes de surface en milieu infiniment profond. Un argument géométrique, développé ci-dessous, permet d'expliquer que le sillage de l'obstacle occupe un secteur de demi-angle $\beta_s = \arcsin \frac{\lambda}{2-\lambda}$, ce qui conduit bien à $\beta_s = \arcsin \left(\frac{1}{3}\right)$ dans le cas $\lambda = \frac{1}{2}$.

En effet, soit O la position actuelle de l'obstacle et $OM = V \tau$ la distance qu'il a parcouru pendant le temps τ pour aller du point M au point O (figure 23). Les lignes de phase qui paraissent immobiles dans le repère de l'obstacle ont des vecteurs d'onde \underline{k} vérifiant $0 = \Omega_i(k) + \underline{k} \cdot \underline{V}$. Une telle ligne de phase, émise par l'obstacle lorsqu'il était en M , peut être représentée par le point N tel que $MN = c_{\varphi i}(k) \tau$ avec MN parallèle à \underline{k} . L'ensemble des points N représentant les lignes de phase émises au point M et immobiles dans le repère de l'obstacle décrit le cercle de centre P et de diamètre OM lorsque l'obstacle est en O . On remarque alors que les paquets d'ondes émis en M par l'obstacle ont voyagé avec la vitesse de groupe $c_{gi}(k) = \lambda c_{\varphi i}(k)$ et sont donc à l'intérieur du cercle de centre S et de diamètre $QM = \lambda OM$. Les paquets d'ondes observés lorsque l'obstacle est en O sont donc bornés par l'ensembles des cercles obtenus à partir de tous les points M où est passé l'obstacle. Comme $RS = \frac{\lambda}{2} OM$ et $OS = (1 - \frac{\lambda}{2}) OM$, l'enveloppe de ces cercles est constitué des deux droites faisant l'angle $\beta_s = \arcsin \frac{RS}{OS} = \arcsin \frac{\lambda}{2-\lambda}$ avec la trajectoire de l'obstacle.



Figure 22: *Sillage de bateau observé à partir d'une des deux tours.*
 (Photo N. Tamestit, DEA "Dynamique des Fluides", août 2001)

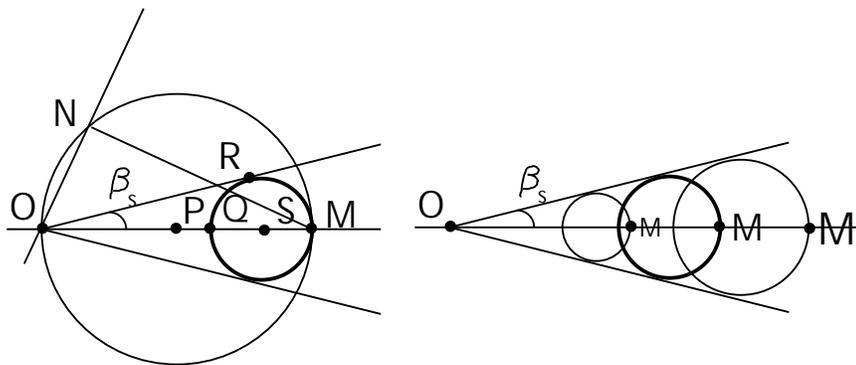


Figure 23: *Construction géométrique du sillage d'un obstacle mobile dans un milieu 2D isotrope avec $\lambda = c_{gi}(k)/c_{\varphi i}(k)$ constant.*

Conclusion

Nous avons donc montré que les paquets d'ondes émis par un obstacle oscillant à la pulsation ω_0 ou mobile à la vitesse $-\underline{V}$ sont constitués d'ondes de vecteurs d'onde \underline{k} oscillant à la même pulsation ω_0 que le forçage et se propageant avec leur vitesse de groupe $\underline{c}_g(\underline{k})$. Dans le cas où l'obstacle oscillant est immobile, les ondes émises sont solutions de l'équation $\omega_0 = \Omega_i(\underline{k})$ où $\Omega_i(\underline{k})$ est la relation de dispersion intrinsèque dans le milieu dispersif. Dans le cas où l'obstacle oscillant se déplace à la vitesse $-\underline{V}$, on se ramène au cas immobile en considérant la nouvelle relation de dispersion $\Omega(\underline{k}) = \Omega_i(\underline{k}) + \underline{V} \cdot \underline{k}$. Ces résultats ont été présentés dans les cas 1D et 2D, mais ils se généralisent facilement au cas 3D.

Ces résultats ont été démontrés par diverses méthodes analytiques et asymptotiques dans la limite où la distance à l'obstacle devient grande ou, ce qui revient au même, la taille de l'obstacle devient petite : calcul de résidu et méthode de la phase stationnaire. On peut interpréter ces calculs de la manière physique suivante : en dehors des paquets d'ondes mis en évidence et régis par la vitesse de groupe, toutes les ondes existent mais leurs interférences mutuelles sont telles qu'aucun signal n'en résulte.

Nous avons traité trois exemples d'ondes dans les fluides : les ondes sonores, les ondes de gravité internes et les ondes de surface en milieu très profond, le cas des ondes de surface en milieu peu profond étant formellement identique aux cas des ondes sonores 2D.

Les ondes sonores ont la particularité d'être non-dispersives. Nous avons vu que le sillage d'un obstacle oscillant et mobile est formé d'ondes propagatives, y compris dans la limite $\omega_0 = 0$ où l'obstacle est seulement mobile. Dans le cas subsonique, le sillage occupe tout l'espace, alors qu'il se réduit à un secteur de demi-angle égal à l'angle de Mach dans le cas supersonique.

Les ondes de gravité internes sont dispersives et la vitesse de groupe est perpendiculaire à la vitesse de phase. Il s'en suit un sillage en forme de Croix de Saint André dans le cas d'un obstacle oscillant immobile. Le cas d'un obstacle oscillant et mobile n'a pas été traité mais découle des notions qui ont été abordées.

Les ondes de surface en milieu profond sont dispersives mais la relation de dispersion est isotrope avec une vitesse de groupe égale à la moitié de la vitesse de phase. Le sillage d'un bateau mobile sans oscillation est localisé dans un secteur de demi-angle $\arcsin(1/3) \sim 19.5^\circ$. C'est en étudiant la limite $\omega_0 \rightarrow 0$ que l'on peut bien réaliser qu'il est constitué d'ondes stationnaires (ondes à gauche et ondes à droite) à la différence du sillage d'ondes sonores où les ondes

ne sont que propagatives.