EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 0.1 Angle du sillage d'un bateau

On considère un milieu 2D homogène dont la relation de dispersion s'écrit $\omega = \Omega_i(k_1, k_2) = \sqrt{g\,k}$ avec $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$. On s'intéresse au sillage lointain d'un obstacle animé d'une vitesse $-\underline{V}$ avec $\underline{V} = V\,\underline{e}^{(1)}$ et $V > 0$. On suppose que cet obstacle n'est pas oscillant.

1) Rappeler brièvement le raisonnement qui conduit à remplacer la relation de dispersion intrinsèque $\omega = \Omega_i(\underline{k})$ par la relation de dispersion $\omega = \Omega_i(\underline{k}) + \underline{k} \cdot \underline{V}$. En déduire que la courbe paramétrée $\underline{k}(s)$ des vecteurs d'ondes présents dans le sillage lointain de l'obstacle peut être représentée par les courbes $k_2 = \pm F(k_1)$ pour $k_1 \leq -k_*$ avec $k_* = g/V^2$ et où F est une fonction que l'on explicitera.
2) Représenter graphiquement la fonction F et représenter schématiquement les vitesses de groupe des ondes émises dans le sillage lointain de l'obstacle.
3) Montrer que les directions des vitesses de groupes des ondes émises dans le sillage lointain sont comprises dans un secteur d'angle aigu. En déduire le demi-angle β_s qui caractérise le sillage lointain de l'obstacle. Dessiner schématiquement ce sillage. Cet angle dépend-t-il de la vitesse V de l'obstacle ?

Corrigé page **??**

EXERCICE 0.2 Ondes d'inerties 3D

La relation de dispersion des ondes d'inerties, obtenues en appliquant une rotation d'axe vertical et de vitesse angulaire $2\,f$ à un fluide incompressible, s'écrit $\omega = \Omega(\underline{k}) = f\,|\sin\theta(\underline{k})|$ avec $\theta(\underline{k}) = \mathrm{arctg}\,(k_3/k_H)$ et $k_H = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$. On note $\underline{e}_H(\underline{k}) = (k_1\,\underline{e}^{(1)} + k_2\,\underline{e}^{(2)})/k_H$, $\underline{e}_k(\underline{k}) = \underline{k}/k$ et $\underline{e}_\theta(\underline{k}) = -\sin\theta(\underline{k})\,\underline{e}_H + \sin\theta(\underline{k})\,\underline{e}^{(3)}$.

1) Exprimer la vitesse de groupe $\underline{c}_g(\underline{k})$ en fonction du module de la vitesse de phase $c_\varphi = \omega/k$, de l'angle θ et des vecteurs unitaires du repère orthonormé $(\underline{e}_k, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}_\theta)$. On pourra utiliser les coordonnées polaires (k, θ) pour simplifier les calculs.
2) En déduire la valeur du produit scalaire $\underline{c}_g(\underline{k})\cdot\underline{c}_\varphi(\underline{k})$ où $\underline{c}_\varphi(\underline{k})$ est la vitesse de phase.
3) On fait osciller un obstacle à la fréquence $\omega_0 < f$. Loin de l'obstacle, on

observe que l'énergie est concentrée sur deux cônes faisant un angle β et $\frac{\pi}{2} - \beta$ avec le vecteur $\underline{\Omega}_0$. Donner la valeur de cet angle β.

Corrigé page **??**

PROBLÈME 0.3 Ondes de surface capillaires

On considère un milieu dispersif 1D caractérisé par la relation de dispersion $\Omega_i(k_1) = \sqrt{(g + \alpha\, k^2) k}$ avec $k = |k_1|$, écrite avec la convention $\omega \geq 0$ (ondes capillaires en eaux profondes).

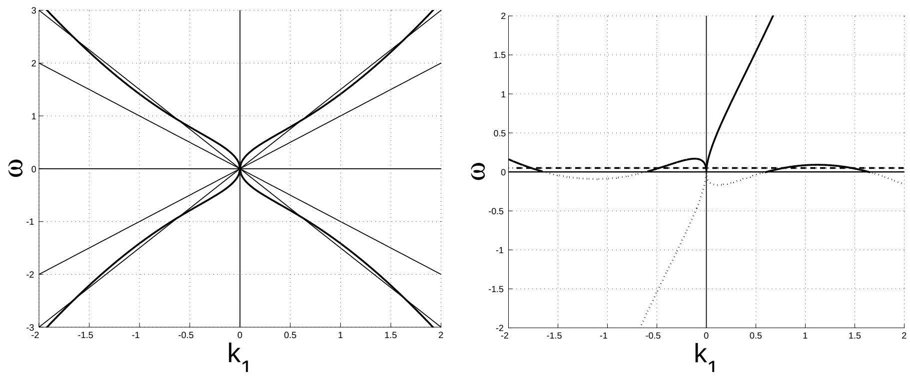

Figure 1: *Tracés de courbes sans légendes.*

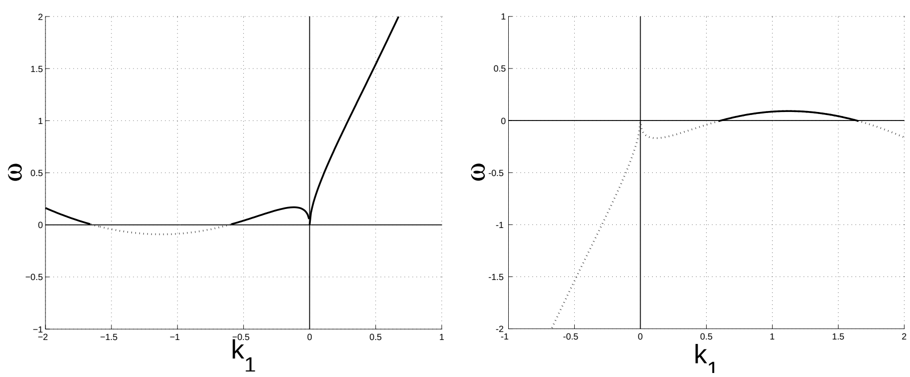

Figure 2: *Tracés de courbes sans légendes.*

1) On note $K_1 = \alpha^{\frac{1}{2}}\, g^{-\frac{1}{2}}\, k_1$. Montrer que la relation de dispersion s'écrit $\omega / A = W_i(K_1) = (1 + K^2)^{\frac{1}{2}}\, K^{\frac{1}{2}}$ où $K = |K_1|$ et A est une constante que l'on calculera en donnant sa dimension.
2) Tracer schématiquement la fonction $Y = W_i(K_1)$ pour $K_1 \in \mathbb{R}$.

3) Discuter le nombre d'intersections de la courbe $Y = W_i(K_1)$ avec la droite $Y = \lambda\, K_1$ en fonction des valeurs du paramètre $\lambda \in I\!R$. Calculer la pente critique λ_* pour laquelle le nombre d'intersections est égal à deux lorsque $|\lambda| = \lambda_*$.
4) En déduire les tracés schématiques des courbes $Y = W_+(K_1) = W_i(K_1) + \beta\, K_1$ et $Y = W_-(K_1) = -W_i(K_1) + \beta\, K_1$, pour $K_1 \in I\!R$ où β est une constante telle que $0 < \lambda_* < \beta$. Rassembler sur un même graphe ces deux courbes en ne gardant que les morceaux tels que $Y \geq 0$.
5) On suppose que le milieu est parcouru par un obstacle, voyageant à la vitesse constante $-V$ avec $V > 0$. Excepté ce mouvement de translation uniforme, l'obstacle n'est soumis à aucune oscillation. Montrer que le sillage est caractérisé par deux nombres d'ondes $k^{(g)}$ et $k^{(d)}$ distincts (et non nuls) pour $0 < V_* < V$ où V_* est une valeur critique que l'on déterminera.
6) Pour $0 < V_* < V$, montrer que les ondes situées en amont de l'obstacle (à gauche) ont une longeur d'onde plus petite que les ondes situées à l'aval (à droite).
7) Calculer (même approximativement) la valeur de V_* en prenant $g = 9.81$ m/s et $\alpha = 7.4\ 10^{-5}$ m^3 s^{-2}.
8) Que se passe-t-il pour $0 < V < V_*$?
9) Comparer avec le sillage obtenu dans le cas $\alpha = 0$ (pas de tension superficielle) et commenter l'effet de la tension superficielle pour ce problème.

Corrigé page **??**