FORMULAIRE

OBSTACLE OSCILLANT EN MILIEU 1D

KdV linéaire forcée

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = f(x)\, e^{-i\,\omega_0\,t} \Longrightarrow \quad \omega = \Omega(k_1) = \alpha\, k_1 - \beta\, k_1^3$$

$$u(x,t) = \frac{1}{i}\, e^{-i\,\omega_0\,t} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{I\!R} \frac{\widehat{f}(k_1)}{-\omega_0 + \Omega(k_1) - i\,\epsilon}\, e^{i\,k_1\,x}\, dk_1$$

Équation des ondes forcée

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x)\, e^{-i\,\omega_0\,t} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \Omega(k_1) = \alpha\,|k_1| = \alpha\, k$$

$$u(x,t) = e^{-i\,\omega_0\,t} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{I\!R} \frac{\widehat{f}(k_1)}{-(\omega_0 + i\,\epsilon)^2 + c^2\ k_1^2}\, e^{i\,k_1\,x}\, dk_1$$

Sillage lointain

$$u(x,t) \sim 2\pi \sum_{n\in I_+} \frac{\widehat{f}(k_n)}{c_g(k_n)} e^{i\,k_n\,x - i\,\omega_0\,t} \qquad \text{pour } x \to \infty$$

avec k_n tels que $\Omega(k_n) = \omega_0$ et $c_g(k_n) = \Omega'(k_n) > 0$.

OBSTACLE OSCILLANT

Vitesse de groupe

$$\underline{c}_g(\underline{k}) = \underline{\mathrm{grad}}_k\,\Omega(\underline{k}) = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial k_1}, \frac{\partial\Omega}{\partial k_2}, \frac{\partial\Omega}{\partial k_3}\right) \ .$$

Ondes de gravité interne

Angle θ_0 solution de : $\omega_0 = N\,|\cos\theta_0|$

Croix de Saint-André : angle θ_0 avec la verticale.

Relation de dispersion 2D quelconque

$$u(\underline{x},t) = \frac{1}{i} e^{-i\,\omega_0\,t} \lim_{\epsilon\to 0} \int\!\!\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\widehat{f}(\underline{k})}{-(\omega_0 + i\,\epsilon) + \Omega(\underline{k})}\, e^{i\,\underline{k}\cdot\underline{x}}\, dk_1\, dk_2$$

Sillage lointain

$$u(\underline{x},t) \sim 2\pi \int_{J_{\underline{d}}} \frac{\widehat{f}[\underline{k}(s)]}{c_g[\underline{k}(s)]}\, e^{i\,\underline{k}(s)\cdot\underline{x} - i\,\omega_0\,t}\, ds$$

avec $\underline{k}(s)$ tels que $\Omega[\underline{k}(s)] = \omega_0$ et $\underline{c}_g[\underline{k}(s)]\cdot\underline{d} > 0$

$$u\left(X\underline{d},t\right) \sim 2\,\pi \sum_{s_n\in I_{\underline{d}}} \sqrt{\frac{2\pi}{|K(s_n)|X}}\, \frac{\widehat{f}[\underline{k}(s_n)]}{c_g[\underline{k}(s_n)]}\, e^{i\,X\,\underline{k}(s_n)\cdot\underline{d} - i\,\omega_0\,t + i\mu(s_n)\pi/4}$$

avec $\underline{k}(s_n)\wedge\underline{d} = 0$, $K(s)$ la courbure de $\underline{k}(s)$ et $\mu(s) = \pm 1$.

Lignes isophases

$$\mathcal{L}_\phi = \left\{\underline{x}\ :\ \Omega(\underline{k}) = \omega_0,\ \underline{k}\cdot\underline{x} = \phi,\ \underline{c}_g(\underline{k})\wedge\underline{x} = \underline{0} \quad \text{et} \quad \underline{c}_g(\underline{k})\cdot\underline{x} > 0\right\} \ .$$

Paramétrage en θ : $\underline{x}(\theta) = \dfrac{\phi}{\underline{\mathcal{K}}(\theta)\cdot\underline{c}_g[\underline{\mathcal{K}}(\theta)]}\,\underline{c}_g[\underline{\mathcal{K}}(\theta)]$

avec $\underline{\mathcal{K}}(\theta)$ tel que $\Omega[\underline{\mathcal{K}}(\theta)] = \omega_0$.

OBSTACLE OSCILLANT OU MOBILE

Changement de relation de dispersion

$$\omega_i = \Omega_i(\underline{k}) \quad \Longrightarrow \quad \omega = \Omega(\underline{k}) = \Omega_i(\underline{k}) + \underline{V} \cdot \underline{k}$$

Équation de ondes sonores

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = f(x, y)\, e^{-i\,\omega_0\, t}$$

$\omega = \Omega_+(\underline{k}) = c\, k + V\, k_1$ et $\omega = \Omega_-(\underline{k}) = -c\, k + V\, k_1$ avec $\omega \geq 0$

Cas subsonique $M = \frac{V}{c} < 1$: sillage occupant tout l'espace

Cas supersonique $M = \frac{V}{c} > 1$: secteur de demi-angle $\alpha_s(M) = \arcsin 1/M$

Ondes de surface en milieu profond

$$\omega = \Omega_+(\underline{k}) = \sqrt{g\, k} + V\, k_1 \qquad \text{et} \qquad \omega = \Omega_-(\underline{k}) = -\sqrt{g\, k} + V\, k_1$$

avec $\omega \geq 0$

Cas $\omega_0 = 0$: secteur de demi-angle $\beta_s = \arcsin(1/3) \sim 19.5°$