Article Pédagogique Multimedia

O. Thual, APM-INPT **thu-fluxen** *(2003)*

Flux d'énergie des ondes dans les fluides

Objectif :

Le but de cet article pédagogique est le calcul l'énergie volumique d'une onde moyennée sur une période ainsi que le flux d'énergie moyen à travers une surface.

1 Équations de conservation de l'énergie

2 Relations de dispersion et vitesses de groupe

3 Flux d'énergie des ondes monochromatiques

1 Équations de conservation de l'énergie

Dans tout ce qui suit, on note ρ la masse volumique, $\underline{U}$ le champ de vitesse, p la pression, e l'énergie interne spécifique (par unité de masse), Θ la température et s l'entropie spécifique.

1.1 Conservation de l'énergie des ondes sonores

1.2 Conservation de l'énergie des ondes de gravité internes

1.3 Conservation de l'énergie des ondes de surface

1.1 Conservation de l'énergie des ondes sonores

Équations d'Euler compressibles :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{U}, \qquad \rho \frac{d\underline{U}}{dt} = -\mathrm{g}\underline{\mathrm{ra}}\mathrm{d}\, p \quad \text{et} \quad \rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \underline{U}$$

avec la loi $p = \mathcal{P}(\rho, s)$ et la relation de Gibbs : $\dfrac{de}{dt} = \Theta \dfrac{ds}{dt} + \dfrac{p}{\rho^2}\dfrac{d\rho}{dt}$

En combinant ces équations on obtient : $\dfrac{ds}{dt} = 0.$

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit

$$\rho \frac{d}{dt}\left(e + \frac{1}{2}\underline{U}^2\right) + \operatorname{div}\,(p\,\underline{U}) =$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\, e + \frac{1}{2}\rho\underline{U}^2\right) + \operatorname{div}\,\left[\left(\rho\, e + \frac{1}{2}\rho\underline{U}^2\right)\underline{U} + p\,\underline{U}\right] = 0\;.$$

Le flux (sortant) de la densité d'énergie $\rho\, e + \frac{1}{2}\rho\,\underline{U}^2$ est le vecteur $p\,\underline{U}$

Équation de conservation de l'énergie :

$$\rho \frac{d}{dt}\left(e + \frac{1}{2}\underline{U}^2\right) + \text{div}\,(p\,\underline{U}) = 0$$

En décomposant $p = p_0 + \tilde{p}$ (où p_0 est une constante)

À l'aide de $\frac{d\rho}{dt} = -\rho\,\text{div}\,\underline{U}$ et $\rho\frac{de}{dt} = -p\,\text{div}\,\underline{U}$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} \rho\frac{de}{dt} + \text{div}\,(p\,\underline{U}) &= -p\,\text{div}\,\underline{U} + \text{div}\,(p\,\underline{U}) = -\tilde{p}\,\text{div}\,\underline{U} + \text{div}\,(\tilde{p}\,\underline{U}) \\ &= \tilde{p}\,\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \text{div}\,(\tilde{p}\,\underline{U})\,. \end{aligned}$$

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit alors

$$\frac{\tilde{p}}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\underline{U}^2\right) + \text{div}\,(\tilde{p}\,\underline{U}) = 0$$

Petites oscillations

$(\rho, p, s, \underline{U}) = (\rho_0, p_0, s_0, \underline{0}) + (\tilde{\rho}, \tilde{p}, \widetilde{s}, \underline{U})$ autour de l'équilibre

On suppose $s = s_0$ constant et on note $c^2 = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_s (\rho_0, s_0)$

Ordre dominant de l'approximation linéaire : $\tilde{p} = c^2 \tilde{\rho}$ et

$$\frac{c^2}{\rho_0}\tilde{\rho}\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\underline{U}^2\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{c^2}{\rho_0^2}\tilde{\rho}^2 + \underline{U}^2\right)\right] = -\mathrm{div}\ (\tilde{p}\underline{U})\ .$$

On définit alors l'énergie acoustique par

$$W = \frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{c^2}{\rho_0^2}\tilde{\rho}^2 + \underline{U}^2\right) = \frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{1}{c^2\rho_0^2}\tilde{p}^2 + \underline{U}^2\right)$$

et le flux associé $\underline{I} = \tilde{p}\,\underline{U}$.

Équation de conservation de l'énergie du modèle linéaire :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathrm{div}\ \underline{I} = 0$$

1.2 Conservation de l'énergie des ondes internes

Équations d'Euler dans le cadre de l'approximation de Boussinesq :

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0, \qquad \frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \frac{N^2}{g} \rho_r \, w \quad \text{et} \quad \rho_r \, \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\text{grad}}\, \tilde{p} - \tilde{\rho} \, g \, \underline{e}^{(3)}$$

où $\tilde{\rho}$ est défini par $\rho = \rho_0(z) + \tilde{\rho}$ et $\tilde{p}$ par $p = p_0(z) + \tilde{p}$.

- On a supposé que $\rho_0(z)$ et $p_0(z)$ vérifient : $\frac{d}{dz} p_0(z) = -\rho_0(z) \, g$.
- Fréquence de Brunt-Väisälä est définie par : $N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_r} \frac{d\rho_0}{dz}}$
- Équation de bilan de l'énergie interne : $\rho \, \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \underline{U} = 0$
- Équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_r \, e + \frac{1}{2} \rho_r \underline{U}^2 \right) + \operatorname{div} \left[\left(\rho_r \, e + \frac{1}{2} \rho_r \underline{U}^2 \right) \underline{U} + \tilde{p} \, \underline{U} \right] =$$

$$\rho_r \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} \underline{U}^2 \right) + \operatorname{div} \left(\tilde{p} \, \underline{U} \right) = -\tilde{\rho} \, g \, w \ .$$

Équation de conservation de l'énergie :

$$\rho_r \frac{d}{dt}\left(e + \frac{1}{2}\underline{U}^2\right) + \text{div}\,(\tilde{p}\,\underline{U}) = -\tilde{\rho}\,g\,w$$

En utilisant : $\dfrac{d\tilde{\rho}}{dt} = \dfrac{N^2}{g}\rho_r w,$ on a : $\tilde{\rho}\,g\,w = \dfrac{g^2}{2\rho_r N^2}\dfrac{d}{dt}(\tilde{\rho}^2).$

L'équation de conservation de l'énergie totale s'écrit donc

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\rho_r\left(\frac{g^2}{\rho_r^2 N^2}\tilde{\rho}^2 + \underline{U}^2\right)\right] + \text{div}\,(\tilde{p}\,\underline{U}) = 0\ .$$

Soit : $\dfrac{dW}{dt} + \text{div}\,\underline{I} = 0$ avec $W = \dfrac{1}{2}\rho_r\left(\dfrac{g^2}{\rho_r^2 N^2}\tilde{\rho}^2 + \underline{U}^2\right)$ et $\underline{I} = \tilde{p}\,\underline{U},$

Petites oscillations : $(\rho, p, \underline{U}) = [\rho_0(z), p_0(z), \underline{0}] + (\tilde{\rho}, \tilde{p}, \underline{U})$

À l'ordre dominant du modèle linéaire : $\dfrac{\partial W}{\partial t} + \text{div}\,\underline{I} = 0$

1.3 Conservation de l'énergie des ondes de surface

Équations d'Euler incompressibles à surface libre

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \rho_0 \, \frac{d\underline{U}}{dt} = -\mathrm{g}\underline{\mathrm{ra}}\mathrm{d}\, p - \rho_0 \, g \, \underline{e}^{(3)}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} w = 0 & \text{sur le fond plat d'équation} & z = -h \\ \frac{d\eta}{dt} = w \quad \text{et} \quad p = p_a & \text{sur la surface libre d'équation} & z = \eta(x, y, t) \end{cases}$$

Comme $-\rho_0 \, g \, \underline{e}^{(3)} = -\mathrm{g}\underline{\mathrm{ra}}\mathrm{d}\, V$ dépend du potentiel $V = \rho_0 \, g \, z$,
l'équation de conservation de l'énergie totale $\rho_0 \, e + \frac{1}{2} \rho_0 \, \underline{U}^2$ s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left[\rho_0 \left(e + \frac{1}{2} \underline{U}^2 + g \, z \right) \right] + \operatorname{div} \left(p \, \underline{U} \right) = 0$$

Formule de Leibniz “spatiale” : pour tout champ continu b

$$\int_{-h}^{\eta} \mathrm{div_H}\,(b\underline{U}_H)\,dz = \mathrm{div_H}\left(\int_{-h}^{\eta} b\,\underline{U}_H\,dz\right) - \left[b\,u\,\frac{\partial\eta}{\partial x} + b\,v\,\frac{\partial\eta}{\partial y}\right](x,y,\eta,t)$$

où $\underline{U}_H = (u,v)$ et $\mathrm{div_H}$ est la divergence horizontale.

Commutation de l’intégration verticale et de la divergence

$$\int_{-h}^{\eta} \mathrm{div}\,(b\,\underline{U})\;dz = \mathrm{div_H}\left(\int_{-h}^{\eta} b\,\underline{U}_H\,dz\right) + b(x,y,\eta,t)\frac{\partial\eta}{\partial t}(x,y,t)$$

en utilisant la relation $\int_{-h}^{\eta}\frac{\partial}{\partial z}(b\,w)\,dz = \left[b\,w\right]_{-h}^{\eta}$ ainsi que les conditions aux limites $\frac{d\eta}{dt} = w$ pour $z=\eta$ et $w=0$ pour $z=-h$.

Formule de Leibniz “temporelle” :

$$\int_{-h}^{\eta}\frac{\partial b}{\partial t}\,dz = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-h}^{\eta} b\,dz\right) - b(x,y,\eta,t)\,\frac{\partial\eta}{\partial t}(x,y,t)$$

On en déduit donc les relations

$$\int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial b}{\partial t} + \text{div}\,(b\,\underline{U})\right]\, dz = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-h}^{\eta} b\, dz\right) + \text{div}_{\text{H}}\, \left(\int_{-h}^{\eta} b\, \underline{U}_H\, dz\right)\,.$$

$$\int_{-h}^{\eta} \text{div}\,(b\,\underline{U})\, dz = \text{div}_{\text{H}}\, \left(\int_{-h}^{\eta} b\, \underline{U}_H\, dz\right) + b(x,y,\eta,t)\frac{\partial \eta}{\partial t}(x,y,t)$$

Équation de conservation de l'énergie totale :

$$\frac{d}{dt}\left[\rho_0\left(e + \frac{1}{2}\underline{U}^2 + g\, z\right)\right] + \text{div}\,(p\,\underline{U}) = 0$$

Comme $\frac{de}{dt} = 0$, div $\underline{U} = 0$ et $\frac{dz}{dt} = w$, cette équation peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho_0\underline{U}^2\right) + \text{div}\,(p\,\underline{U}) &= -\rho_0\, g\, w \\ \Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_0\underline{U}^2\right) + \text{div}\, \left[\left(\frac{1}{2}\rho_0\underline{U}^2\right)\, \underline{U}\right] + \text{div}\, (p\,\underline{U}) &= -\rho_0\, g\, w\,. \end{aligned}$$

Intégration sur la verticale

• En posant $b = \frac{1}{2}\rho_0 \, \underline{U}^2$, on obtient un premier terme :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2}\rho_0 \, \underline{U}^2 \; dz\right) + \mathrm{div}_{\mathrm{H}} \; \left(\int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2}\rho_0 \, \underline{U}^2 \; \underline{U}_H \; dz\right)$$

• On définit la "pression dynamique" $\tilde{p}$ par : $p = p_a - \rho_0 \, g \, z + \tilde{p}$.

En appliquant div $(\underline{U}) = 0$ et div $(z \, \underline{U}) = w$, on écrit

$$\int_{-h}^{\eta} \mathrm{div} \; (p \, \underline{U}) \; dz = -\rho_0 \, g \int_{-h}^{\eta} w \, dz + \int_{-h}^{\eta} \mathrm{div} \; (\tilde{p} \, \underline{U}) \; dz$$

En posant $b = p$, on obtient un second terme :

$$\int_{-h}^{\eta} \mathrm{div} \; (\tilde{p} \, \underline{U}) \; dz = \mathrm{div}_{\mathrm{H}} \; \left(\int_{-h}^{\eta} \tilde{p} \, \underline{U}_H \, dz\right) + \tilde{p}(x, y, \eta, t) \, \frac{\partial \eta}{\partial t} \; .$$

- En intégrant l'énergie $\frac{1}{2}\rho_0\,\underline{U}^2 + \rho_0\,g\,z$ sur la verticale on obtient

$$\int_{-h}^{\eta}\left(\frac{1}{2}\rho_0\,\underline{U}^2 + \rho_0\,g\,z\right)\,dz = \frac{1}{2}\rho_0\int_{-h}^{\eta}\underline{U}^2\,dz + \frac{1}{2}\rho_0\,g(\eta^2 - h^2)$$

Équation de conservation intégrée sur la verticale :

En notant $W = \int_{-h}^{\eta}\frac{1}{2}\rho_0\,\underline{U}^2\,dz + \frac{1}{2}\,\rho_0\,g\,\eta^2$ et $\underline{I} = \int_{-h}^{\eta}\tilde{p}\,\underline{U}_H\,dz$, on a

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathrm{div_H}\,\left(\underline{N} + \underline{I}\right) = \rho_0\,g\,\eta\,\frac{\partial \eta}{\partial t} - \tilde{p}(x,y,\eta,t)\,\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

avec $\underline{N} = \int_{-h}^{\eta}\frac{1}{2}\rho_0\,\underline{U}^2\,\underline{U}_H\,dz$

Petites oscillations : $(\eta, p, \underline{U}) = (0, p_a - \rho_0\, g\, z, \underline{0}) + (\eta, \tilde{p}, \underline{U})$

Écoulements irrotationnels pour le modèle linéaire : $\underline{U} = \underline{\text{grad}}\ \phi$.

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 \\ \tilde{p} = -\rho_0\ \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} = w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\,\eta \end{cases} \text{ en } z = 0 \text{ et } \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \ \text{ en } z = -h. \right.$$

$$W = \frac{1}{2}\rho_0 \int_{-h}^{0} (\underline{\text{grad}}\ \phi)^2\ dz + \frac{1}{2}\rho_0\, g\, \eta^2 \quad \text{et} \quad \underline{I} = -\rho_0 \int_{-h}^{0} \frac{\partial \phi}{\partial t}\ \underline{\text{grad}}_H \underline{\phi}\ dz\ .$$

On a aussi $\tilde{p} = \rho_0\, g\, \eta$ en $z = \eta$ (ou $z = 0$), ce qui permet d'écrire

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}_{\text{H}}\ (\underline{N} + \underline{I}) = [\rho_0\, g\, \eta \ - \tilde{p}(x, y, \eta, t)]\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0.$$

En négligeant le terme $\underline{N}$, l'équation de conservation l'énergie à l'ordre dominant de l'approximation linéaire s'écrit :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}_{\text{H}}\ \underline{I} = 0\ .$$

2 Relations de dispersion et vitesses de groupe

Solutions $e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}-i\omega\, t}$ de vecteur d'onde $\underline{k}$ et de pulsation ω.

Relations de dispersion $\omega = \Omega(\underline{k})$ avec la convention $\omega \geq 0$

Vitesse de phase : $\underline{c}_\varphi(\underline{k}) = c_\varphi(\underline{k})\, \underline{e}_k = \frac{\omega}{k}\, \underline{e}_k$ où $\underline{e}_k = \underline{k}/k$

Vitesse de groupe :

$$\underline{c}_g(\underline{k}) = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial k_1}, \frac{\partial \Omega}{\partial k_2}, \frac{\partial \Omega}{\partial k_3} \right) = \mathrm{g}\underline{\mathrm{ra}}\mathrm{d}_k \Omega(\underline{k}) \; .$$

2.1 Non dispersion des ondes sonores

2.2 Dispersion des ondes de gravité internes

2.3 Dispersion des ondes de surface

2.1 Non dispersion des ondes sonores

Petites oscillations $(\rho, p, \underline{U}) = (\rho_0, p_0, \underline{0}) + (\tilde{\rho}, \tilde{p}, \underline{U})$ et système linéaire

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\rho_0 \,\mathrm{div}\, \underline{U} \;, \quad \rho_0 \,\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\mathrm{g}\underline{\mathrm{ra}}\mathrm{d}\; \tilde{p} \quad \text{ et } \quad \frac{\partial \widetilde{s}}{\partial t} = 0 \;.$$

Écoulement irrotationnel : $\underline{U} = \mathrm{g}\underline{\mathrm{ra}}\mathrm{d}\; \phi$ et homoentropique : $\widetilde{s} = 0$
(il suffit que cela soit vrai à un instant initial)

Ondes planes $(\phi, \tilde{\rho}, \tilde{p}) = (\phi_m, \rho_m, p_m) e^{i\underline{k}\cdot\underline{x} - i\omega t}$ avec $\omega = c\, k$ et

$$(\phi_m, \rho_m, p_m) = \phi_m \left(1 \;, i\,\frac{\rho_0 \omega}{c^2}, i \rho_0 \omega\right) \;.$$

La vitesse de phase est égale à la vitesse de groupe :

$$\underline{c}_g(\underline{k}) = \underline{c}_\varphi(\underline{k}) = \frac{\omega}{k}\, \underline{e}_k \;.$$

Ces ondes sont non dispersives.

2.2 Dispersion des ondes de gravité internes

Petites oscillations $(\rho, p, \underline{U}) = [\rho_0(z), p_0(z), 0] + (\tilde{\rho}, \tilde{p}, \underline{U})$:

$$\text{div}\, \underline{U} = 0 \;, \qquad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{N^2}{g}\, \rho_r\, w \quad \text{et} \quad \rho_r \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\text{g}\underline{\text{ra}}\text{d}\, \tilde{p} - \tilde{\rho}\, g\, \underline{e}^{(3)} \quad .$$

Ondes planes $(w, \tilde{\rho}, \tilde{p}) = (w_m, \rho_m, p_m) e^{i\underline{k}\cdot\underline{x} - i\omega t}$ avec $\omega = N\,|\cos\theta|$

$$(w_m, \rho_m, p_m) = w_m \left(1,\; i\omega \frac{k^2}{g\, k_H^2}\, \rho_r, -\omega \frac{k_3}{k_H^2} \rho_r \right)$$

avec $k_H^2 = k_1^2 + k_2^2$ et $\theta = \text{arctg}\,(k_3/k)$

En posant $\underline{e}_\theta = -\sin\theta\, \underline{e}_H + \cos\theta\, \underline{e}^{(3)}$ avec $\underline{e}_H = \underline{k}_H / k_H$:

$$\underline{c}_g(\underline{k}) = (1/k)(\partial\Omega/\partial\theta)\, \underline{e}_\theta(\underline{k}) = -\frac{\omega}{k}\; \text{tg}\,\theta\; \underline{e}_\theta(\underline{k})$$

Vitesse de phase $\underline{c}_\varphi(\underline{k}) = \frac{\omega}{k}\, \underline{e}_k$. On a $\underline{c}_g \cdot \underline{c}_\varphi = 0$

2.3 Dispersion des ondes de surface

Petites perturbations $(\eta, p, \underline{U}) = (0, p_a - \rho_0 g z, \underline{0}) + (\eta, \tilde{p}, \underline{\text{grad}}\ \phi)$:

$$\Delta\phi = 0 \ \text{ avec } \ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \ \text{ en } z = -h \qquad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\ \eta \end{cases} \quad \text{en } z = 0.$$

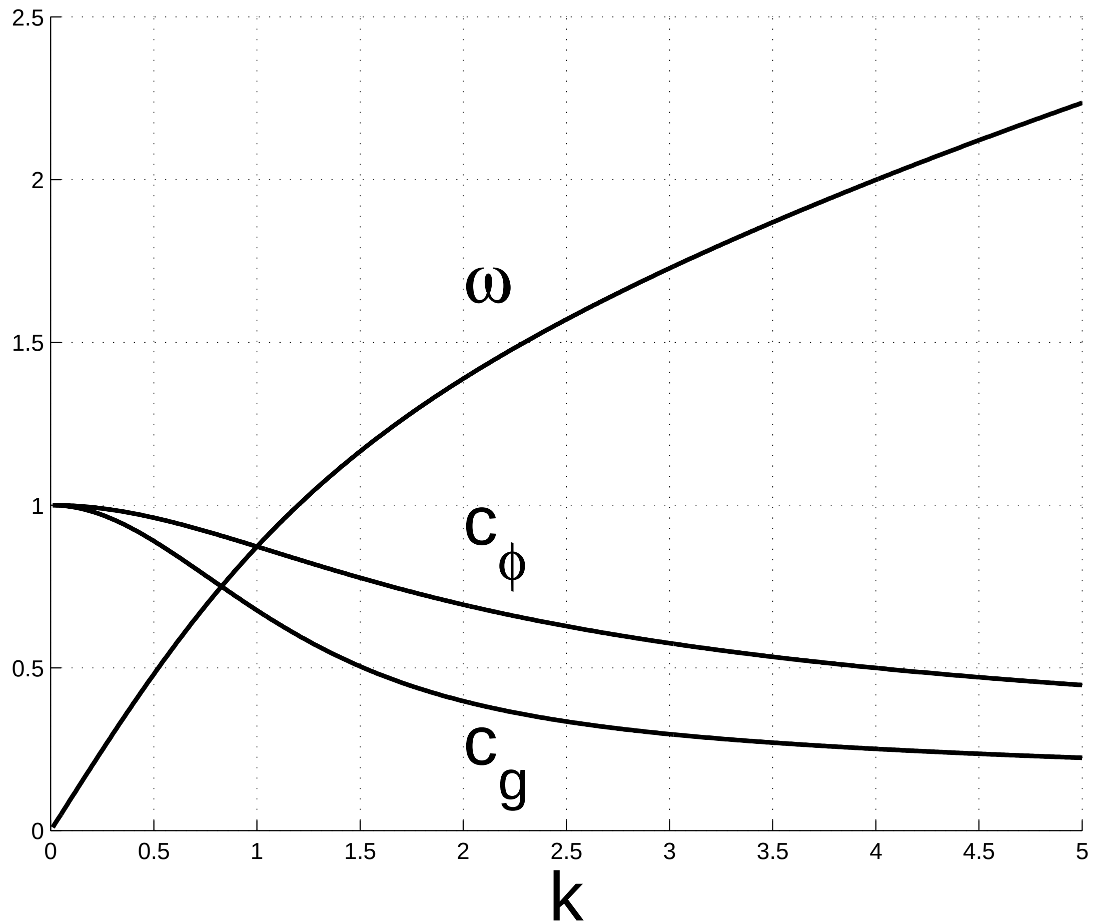
Ondes $(\phi, \eta) = [\Phi(z), \eta_m]\, e^{i(k_1\, x + k_2\, y - \omega\, t)}$ avec $\omega = \sqrt{g\ k\ \tanh(k\, h)}$ et

$$\Phi(z) = \Phi_m\ \cosh[k(z+h)] \quad \text{et} \quad (\Phi_m, \eta_m) = \Phi_m \left(1\ , i \frac{\omega}{g}\ \cosh(kh) \right)\ .$$

Le calcul de la vitesse de groupe conduit à

$$\underline{c}_g(\underline{k}) = \underline{c}_\varphi(\underline{k}) \left(\frac{1}{2} + \frac{k\, h}{\sinh(2\, k\, h)} \right)$$

parallèle à la vitesse de phase $\underline{c}_\varphi(\underline{k}) = \frac{\omega}{k}\ \underline{e}_k$.



On note que $c_g \leq c_\varphi$ et $\begin{cases} c_g = \frac{1}{2} c_\varphi & \text{pour } kh \to \infty \\ c_g = c_\varphi = \sqrt{g\,h} & \text{pour } kh \to 0 \end{cases}$

3 Flux d'énergie des ondes monochromatiques

Moyenne d'un champ b sur une période $T = 2\pi/\omega$:

$$\langle b \rangle^T = \frac{1}{T} \int_0^T b \, dt \, .$$

On s'intéresse à $\langle W \rangle^T = \langle W_{\text{pot}} \rangle^T + \langle W_{\text{cin}} \rangle^T$ et $\langle \underline{I} \rangle^T$ pour une onde monochromatique de vecteur d'onde $\underline{k}$ et de pulsation $\omega = \Omega(\underline{k})$:

$$\langle \underline{I} \rangle^T = \underline{c}_g(\underline{k}) \ \langle W \rangle^T$$

3.1 Flux d'énergie d'une onde sonore

3.2 Flux d'énergie d'une onde de gravité interne

3.3 Flux d'énergie d'une onde de surface

Relations utiles :

$$\langle b \rangle^T = \frac{1}{T} \int_0^T b \, dt \; .$$

Étant donnés deux champs :

$$b_1(\underline{x}, t) = \mathrm{Re}\left[b_{1m} \, e^{(i\underline{k}\cdot\underline{x} - i\omega t)} \right] \quad \text{et} \quad b_2(\underline{x}, t) = \mathrm{Re}\left[b_{2m} \, e^{(i\underline{k}\cdot\underline{x} - i\omega t)} \right] \; ,$$

le terme $\langle b_1 \; b_2 \rangle^T$ est indépendant de l'espace (et du temps) et s'écrit

$$\langle b_1 \; b_2 \rangle^T = \frac{1}{4} \left(b_{1m} \; b_{2m}^* + b_{1m}^* \; b_{2m} \right) \; .$$

En particulier, on a la relation $\left\langle b^2 \right\rangle^T = \frac{1}{2} |b_m|^2$.

3.1 Flux d'énergie d'une onde sonore

- Relation de dispersion $\omega = c\,k$
- Énergies : $W_{\rm cin}(\underline{x},t) = \frac{1}{2}\rho_0 \underline{U}^2$ et $W_{\rm pot}(\underline{x},t) = \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho_0}\tilde{\rho}^2$
- Onde : $\phi = \phi_m e^{i\,\underline{k}\cdot\underline{x} - i\,\omega\,t}$ avec $\underline{U}_m = i\,\phi_m\,\underline{k}$ et $\rho_m = i(\rho_0\omega/c^2)\phi_m$:

$$\langle W_{\rm cin}\rangle^T = \frac{1}{4}\rho_0 k^2 |\phi_m|^2 \qquad \text{et} \qquad \langle W_{\rm pot}\rangle^T = \frac{1}{4}(c^2/\rho_0)|\rho_m|^2 = \langle W_{\rm cin}\rangle^T$$

$$\langle W\rangle^T = \frac{1}{2}\rho_0\; k^2\; |\phi_m|^2\; .$$

Les relations $p_m = i\,\rho_0\,\omega\,\phi_m$ et $\underline{I} = \tilde{p}\,\underline{U}$ entraînent :

$$\begin{aligned} \langle \underline{I}\rangle^T &= \frac{1}{4}p_m\,\underline{U}_m^* + \frac{1}{4}p_m^*\,\underline{U}_m \\ &= \frac{1}{2}\rho_0\,\omega\,|\phi_m|^2\,\underline{k} = \frac{1}{2}\rho_0\,k^2\,|\phi_m|^2\,\frac{\omega}{k}(\underline{k}/k) = \underline{c}_g(\underline{k})\,\langle W\rangle^T \end{aligned}$$

où la vitesse de groupe est $\underline{c}_g(\underline{k}) = \underline{c}_\varphi(\underline{k}) = c$.

3.2 Flux d'énergie d'une onde de gravité interne

- Relation de dispersion $\omega = N\ k_H/k$
- Énergies : $W_{\rm cin}(\underline{x},t) = \frac{1}{2}\rho_r \underline{U}^2$ et $W_{\rm pot}(\underline{x},t) = \frac{1}{2}\frac{g^2}{\rho_r^2 N^2}\tilde{\rho}^2$
- Onde : $(w,\tilde{\rho},\tilde{p}) = (w_m,\rho_m,p_m)e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}-i\omega t}$ avec $\rho_m = i\omega k^2 q_m/(g\,k_H^2)$
- Vitesses : $(u,v) = (u_m,v_m)e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}-i\omega t}$ avec $(u_m,v_m) = -\frac{w_m k_3}{k_H^2}(k_1,k_2)$

$$\langle W_{\rm cin}\rangle^T = \frac{1}{4}\rho_r(|u_m|^2+|v_m|^2+|w_m|^2) = \frac{1}{4}\rho_r|w_m|^2\ k^2/k_H^2$$

$$\langle W_{\rm pot}\rangle^T = \frac{1}{4}(g^2/\rho_r^2 N^2)|\rho_m|^2 = \langle W_{\rm cin}\rangle^T$$

En utilisant la relation $p_m = i\,\omega\,q_m\,k_3/k_H^2$ on a

$$\langle W\rangle^T = \frac{1}{2\rho_r}\ |q_m|^2\ \frac{k^2}{k_H^2} \quad \text{et} \quad \langle \underline{I}\rangle^T = \frac{1}{4}\,(p_m\,\underline{U}_m^* + p_m^*\,\underline{U}_m) = \underline{c}_g(\underline{k})\ \langle W\rangle^T$$

3.3 Flux d'énergie d'une onde de surface

- Relation de dispersion $\omega = \sqrt{g\, k\, \tanh(k\, h)}$
- Énergies : $W_{\text{cin}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2}\rho_0 \int_{-h}^{0} (\underline{\text{grad}}\ \phi)^2\ dz$ et $W_{\text{pot}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2}\rho_0\, g\eta^2$
- Onde $(\eta, \phi) = (\eta_m, \phi_m\ \cosh[k(z+h)])e^{i\, k_1\, x + i\, k_2\, y - i\, \omega\, t}$

En utilisant $\eta_m = i\,(\omega/g)\ \cosh(kh)\,\phi_m$:

$$\langle W_{\text{cin}}\rangle^T = \frac{1}{8}\rho_0|\phi_m|^2\ k\ \sinh(2kh) = \frac{1}{4}\rho_0 g\frac{\omega^2}{g^2}\cosh^2(kh)|\phi_m|^2 = \langle W_{\text{pot}}\rangle^T$$

$$\text{et donc} \qquad \langle W\rangle^T = \frac{1}{4}\rho_0|\phi_m|^2\ k\ \sinh(2kh) = \frac{1}{2}\rho_0\ g\ |\eta_m|^2$$

La relation $p_m = i\,\rho_0\,\omega\,\phi_m \cosh[k(z+h)]$ entraîne

$$\langle \underline{I}\rangle^T = \underline{c}_g(\underline{k})\ \langle W\rangle^T$$

où la vitesse de groupe est $\underline{c}_g(\underline{k}) = (\omega/k)(\underline{k}/k)\,[1/2 + kh/\sinh(2kh)]$.

Conclusion

Densité d'énergie $W = W_{\mathrm{cin}} + W_{\mathrm{pot}}$ et flux $\underline{I}$ avec

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathrm{div}\ \underline{I} = 0$$

On a toujours

$$\langle W_{\mathrm{pot}} \rangle^T = \langle W_{\mathrm{cin}} \rangle^T \qquad \text{et} \qquad \langle \underline{I} \rangle^T = \underline{c}_g(\underline{k})\ \langle W \rangle^T$$

Pour une onde monochromatique, la relation

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle W \rangle^T + \mathrm{div}\ \langle \underline{I} \rangle^T = 0$$

est trivialement vérifiée dans la mesure où $\langle W \rangle^T$ et $\langle \underline{I} \rangle^T$ sont indépendants de l'espace et du temps. Cette relation devient riche lorsque $\langle W \rangle^T$ et $\langle \underline{I} \rangle^T$ varient (lentement) avec l'espace et le temps

ONDES SONORES

Modèle linéaire

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\rho_0 \,\mathrm{div}\, \underline{U} \;, \quad \rho_0 \,\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\mathrm{g\underline{ra}d}\; \tilde{p} \;, \quad s = s_0 \;, \quad \tilde{p} = c^2 \;\tilde{\rho}$$

avec $(\rho, p, \underline{U}) = (\rho_0, p_0, \underline{0}) + (\tilde{\rho}, \tilde{p}, \mathrm{g\underline{ra}d}\; \phi)$ et $c^2 = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_s (\rho_0, s_0)$

Conservation de l'énergie

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathrm{div}\; (\underline{I}) = 0 \;\text{ avec }\; W = \frac{1}{2}\rho_0 \left(\frac{1}{c^2 \rho_0^2}\tilde{p}^2 + \underline{U}^2\right) \;\text{ et }\; \underline{I} = \tilde{p}\,\underline{U}$$

Relation de dispersion

$$\omega = c\,k, \quad \underline{c}_\varphi = \underline{c}_g = c\;\underline{e}_k \;.$$

Cas d'une onde monochromatique

$$\langle W_{\mathrm{cin}} \rangle^T = \langle W_{\mathrm{pot}} \rangle^T \;\;, \quad \langle W \rangle^T = \frac{1}{2}\rho_0 \; k^2 \;\; |\phi_m|^2 \;\text{ et }\; \langle \underline{I} \rangle^T = \underline{c}_g \;\; \langle W \rangle^T$$

ONDES DE GRAVITÉ INTERNES

Modèle linéaire

div $\underline{U} = 0, \qquad \frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \frac{N^2}{g}\rho_r\, w \quad \text{et} \quad \rho_r\, \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\text{grad}}\; \tilde{p} - \tilde{\rho}\; g\; \underline{e}^{(3)}$

avec $(\rho, p, \underline{U}) = [\rho_0(z), p_0(z), 0] + (\tilde{\rho}, \tilde{p}, \underline{U})$ et $N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_r}\frac{d\rho_0}{dz}}$

Conservation de l'énergie

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}\,(\underline{I}) = 0 \quad \text{avec} \qquad W = \frac{1}{2}\rho_r \left(\frac{g^2}{\rho_r^2 N^2}\tilde{\rho}^2 + \underline{U}^2 \right) \quad \text{et} \quad \underline{I} = \tilde{p}\,\underline{U}$$

Relation de dispersion

$$\omega = N\,|\cos\theta|\;, \quad \underline{c}_\varphi = \frac{\omega}{k}\underline{e}_k \quad \text{et} \quad \underline{c}_g = c_\varphi\;\text{tg}\,\theta\;\underline{e}_\theta \quad \text{avec} \quad \underline{c}_\varphi \cdot \underline{c}_g = 0$$

Cas d'une onde monochromatique

$$\langle W_{\text{cin}} \rangle^T = \langle W_{\text{pot}} \rangle^T\;, \quad \langle W \rangle^T = \frac{1}{2\rho_r}\;|q_m|^2\;k^2/k_H^2 \qquad \langle \underline{I} \rangle^T = \underline{c}_g\;\langle W \rangle^T$$

ONDES DE SURFACE

Modèle linéaire

$$\Delta\phi = 0 \qquad \text{et} \qquad \tilde{p} = -\rho_0 \, \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

avec $\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ en $z = -h$ et $\left[\dfrac{\partial \eta}{\partial t} = \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \, , \quad \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = -g \, \eta \right]$ en $z = 0$.

avec $(\eta, p, \underline{U}) = (0, p_a - \rho_0 g z, \underline{0}) + (\eta, \tilde{p}, \mathrm{g}\underline{\mathrm{ra}}\mathrm{d} \; \phi)$

Conservation de l'énergie

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathrm{div} \; (\underline{I}) = 0$$

avec

$$W = \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} \rho_0 \; \underline{U}^2 \; dz + \frac{1}{2} \, \rho_0 \, g \, \eta^2 \qquad \text{et} \qquad \underline{I} = \int_{-h}^{\eta} \tilde{p} \, \underline{U}_H \, dz$$

Relation de dispersion

$$\omega = \sqrt{g\ k\ \tanh(k\,h)}, \quad \underline{c}_\varphi = \frac{\omega}{k}\underline{e}_k \qquad \text{et} \qquad \underline{c}_g = \underline{c}_\varphi \left(\frac{1}{2} + \frac{k\,h}{\sinh(2\,k\,h)} \right) .$$

Cas d'une onde monochromatique

$$\langle W_{\mathrm{cin}} \rangle^T = \langle W_{\mathrm{pot}} \rangle^T \ , \quad \langle W \rangle^T = \frac{1}{2}\rho_0\ g\,|\eta_m|^2 \ \ \text{et} \ \ \langle \underline{I} \rangle^T = \underline{c}_g\ \langle W \rangle^T$$