CORRIGÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

Corrigé 0.1 Flux d'énergie et KdV linéaire

1) On vérifie facilement que $\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} = 0$. **2)** On a $\langle W \rangle^T = \frac{1}{4}|u_m|^2$. **3)** On a $\left\langle u \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\rangle^T = -\frac{1}{2} \; k_1^2 \; |u_m|^2$ et $\left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right\rangle^T = k_1^2 \; |u_m|^2$. On en déduit que $\langle I \rangle^T = \frac{\alpha}{4}|u_m|^2 - \frac{3\,\beta}{4}\, k_1^2 \, |u_m|^2$. **4)** Comme $c_g(k_1) = \alpha - 3\,\beta\, k_1^2$, on remarque que $\langle W \rangle^T = c_g(k_1) \; \langle I \rangle^T$.

Corrigé 0.2 Eaux très profondes

1) Dans la limite des eaux très profondes, la relation de dispersion devient $\omega = \sqrt{g\,k}$. **2)** En choisissant $\Phi_m \in I\!R$ dans l'expression d'une onde monochromatique $\phi(x,y,z,t) = \Phi_m \; e^{kz + ik_1x + ik_2y - i\omega t}$ et en utilisant $\underline{U} = \mathrm{Re}(\underline{\mathrm{grad}} \; \phi)$ on obtient

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= -\Phi_m \; k_1 \; e^{kz} \; \sin(k_1x + k_2y - \omega t) \\ v(x,y,z,t) &= -\Phi_m \; k_2 \; e^{kz} \; \sin(k_1x + k_2y - \omega t) \\ w(x,y,z,t) &= \Phi_m \; k \; e^{kz} \; \cos(k_1x + k_2y - \omega t) \; . \end{aligned} \tag{1}$$

En utilisant $\eta = -\mathrm{Re}\left(\frac{1}{g}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$, on obtient $\eta(x,y,t) = -\Phi_m \, \frac{\omega}{g} \; \sin(k_1x + k_2y - \omega t)$. **3)** Les trajectoires sont des cercles dans le plan $(\underline{k}, \underline{e}^{(3)})$ de rayon $\Phi_m \; \frac{k}{\omega} \; e^{kz} = \Phi_m \; \sqrt{\frac{1}{k\,g}} \; e^{kz}$. **4)** En utilisant l'expression réelle de (u,v,w) pour une onde de vecteur d'onde $\underline{k}$, on a $\underline{U}^2(x,y,z,t) = \Phi_m^2 \; k^2 e^{2kz}$. On en déduit que $W_{\mathrm{cin}}(x,y,t) = \frac{1}{4}\rho_0 \, \Phi_m^2 \; k \; e^{2k\eta(x,y,t)}$. Pour une onde infinitésimale, on a, à l'ordre dominant $W_{\mathrm{cin}}(x,y,t) = \frac{1}{4}\rho_0 \, \Phi_m^2 \; k$. Comme cette expression de dépend par du temps, on a $\langle W_{\mathrm{cin}} \rangle^T = \frac{1}{4}\rho_0 \, \Phi_m^2 \; k$. **5)** En utilisant l'expression réelle de η, on obtient $\langle W_{\mathrm{pot}} \rangle^T = \frac{1}{2}\rho_0 \, \Phi_m^2 \; \frac{\omega^2}{g} \; \sin^2(k_1x + k_2y - \omega\, t)$. En utilisant $\omega^2 = g\,k$ et en moyennant sur une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, on obtient $W_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{4}\rho_0 \, \Phi_m^2 \; k$. On aurait pu aussi utiliser directement le résultat $\langle W_{\mathrm{cin}} \rangle^T = \langle W_{\mathrm{pot}} \rangle^T$ établi pour le cas des ondes de surface de profondeur quelconque. **6)** À l'ordre dominant, on a $\tilde{p} = -\rho_0 \, \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho_0 \, \omega \, \Phi_m \, e^{kz} \; \sin(k_1x + k_2y - \omega t)$. En exprimant $\underline{\mathrm{grad}}_H \phi = -\underline{k} \, \Phi_m \, e^{kz} \; \sin(k_1x + k_2y - \omega t)$ et en utilisant $\int_{-\infty}^{0} e^{2kz} \; dz = \frac{1}{2k}$, on obtient, à l'ordre dominant, $\underline{I}(x,y,t) = -\frac{1}{2}\rho_0 \, \omega \, (\underline{k}/k) \, \Phi_m^2 \; \sin^2(k_1x + k_2y - \omega t)$. On en déduit que $\langle \underline{I} \rangle^T = \frac{1}{4}\rho_0 \, \omega \, (\underline{k}/k) \, \Phi_m^2 = \left[\frac{1}{2}\frac{\omega}{k} \; (\underline{k}/k)\right] \left[\frac{1}{2}\rho_0 \, \Phi_m^2 \; k\right] = \underline{c}_g \; \langle W \rangle^T$.

Corrigé 0.3 Ondes d'inertie 3D

Relation de dispersion

1)Le modèle décrit l'écoulement d'un fluide parfait pesant incompressible dans un repère tournant de vecteur de rotation $\underline{\Omega_0} = \Omega_0 \, \underline{e}^{(3)}$. En effet, la vitesse absolue dans le repère fixe est reliée à la vitesse relative $\underline{U}$ par la relation $\underline{U}_a = \underline{U} + \underline{\Omega_0} \wedge \underline{x}$ si l'axe de rotation passe par $\underline{0}$. L'accélération absolue est alors $\underline{\Gamma}_a = \frac{d\underline{U}}{dt} + 2\,\underline{\Omega_0} \wedge \underline{U} + \underline{\Omega_0} \wedge (\underline{\Omega_0} \wedge \underline{x})$. En remarquant que $\underline{\Omega_0} \wedge (\underline{\Omega_0} \wedge \underline{x}) = -\frac{1}{2}\underline{\text{grad}} \left[(\underline{\Omega_0} \wedge \underline{x})^2 \right]$ on obtient l'équation indiquée. Si l'axe de rotation passe par un autre point que $\underline{0}$, il suffit de rajouter une constante à la pression p. **2)**Comme $-\frac{\partial}{\partial z} P_0 - \rho_0 g = 0$, on a $P_0(z) = p_{\text{ref}} - \rho_0 g z$. Il s'agit de la pression hydrostatique. **3)**Le modèle linéarisé s'écrit $\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t}\underline{U} + 2\Omega_0 \wedge \underline{U} \right) = -\underline{\text{grad}}\ \tilde{p}$ et $\text{div}\ \underline{U} = 0$ et s'explicite en $\frac{\partial u}{\partial t} - f v = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial t} + f u = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}$ et $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$. **4)**Comme les équations sont invariantes par toutes les translations d'espace, les modes propres du problème linéaire sont des ondes planes. **5)** Les équations sont invariantes par rapport aux rotations d'axe $\underline{e}^{(3)}$. On peut donc supposer que $k_2 = 0$ en tournant les axes autour de de $\underline{e}^{(3)}$. **6)**La relation de dispersion s'obtient en annulant le déterminant

$$\begin{vmatrix} -i\omega & -f & 0 & ik_1/\rho_0 \\ f & -i\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega & ik_3/\rho_0 \\ ik_1 & 0 & ik_3 & 0 \end{vmatrix} = -i\omega \begin{vmatrix} -i\omega & 0 & 0 \\ 0 & -i\omega & ik_3/\rho_0 \\ 0 & ik_3 & 0 \end{vmatrix} \tag{2}$$

$$+f \begin{vmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & -i\omega & ik_3/\rho_0 \\ ik_1 & ik_3 & 0 \end{vmatrix} - ik_1/\rho_0 \begin{vmatrix} f & -i\omega & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega \\ ik_1 & 0 & ik_3 \end{vmatrix} \tag{3}$$

$= (-i\omega)(-i\omega)k_3^2/\rho_0 + f^2 k_3^2/\rho_0 - (ik_1\rho_0)(i\omega)(-\omega k_1) = -\omega^2 k_3^2/\rho_0 + f^2 k_3^2/\rho_0 - \omega^2 k_1^2/\rho_0 = 0$. D'où $\omega^2 = f^2 k_3^2/(k_1^2 + k_3^2) = f^2 k_3^2/k^2$. D'où la relation de dispersion $\omega = \Omega(\underline{k}) = f|k_3|/k$ en adoptant la convention $\omega \geq 0$. **7)**Cette relations s'écrivent $\omega = \Omega(\underline{k}) = f|\sin\theta|$ avec $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Cette relation de dispersion dépend de $\underline{k}$ à travers sa direction et pas de son module. **8)**Dans le cas où Ω_0 n'est pas vertical, on remarque que les équations linéarisées $\frac{\partial}{\partial t}\underline{U} + 2\Omega_0 \wedge \underline{U} = -\underline{\text{grad}}\ \tilde{p}$ et $\text{div}\ \underline{U} = 0$ sont inchangées. Il suffit alors de définir $\underline{e}^{(3)}$ dans la direction de Ω_0 pour obtenir les mêmes ondes et la même relation de dispersion. En fait, la gravité n'intervient pas dans ce problème.

Champs oscillants des ondes d'inertie

9)Si v_m n'était pas réel, une translation de l'origine de l'espace ou du temps permettrait de se ramener au cas $v_m \in I\!R$. **10)**Sachant que $\omega^2 = f^2 k_3^2/k^2$, on doit résoudre le système (i) $-i\omega u_m - f v_m = -ik_1 p_m/\rho_0$ (ii) $-i\omega v_m + f u_m = 0$ (iii) $-i\omega w_m = -ik_3 p_m/\rho_0$ et (iv) $ik_1 u_m + ik_3 w_m = 0$. De (ii) on tire $u_m = i\omega v_m/f$, de (iv) $w_m = -k_1 u_m/k_3 = -i(\omega/f)(k_1/k_3)v_m$ et de (iii) $p_m = \rho_0 \omega w_m/k_3 = -i\rho_0\omega^2 k_1 v_m/f k_3^2 = -i\rho_0 f k_1 v_m/k^2$. La relation (i) sert alors de vérification des calculs. D'où $(u_m, v_m, w_m, p_m) = v_m \left(i\frac{\omega}{f}, 1, -i\frac{\omega}{f}\frac{k_1}{k_3}, -i\rho_0 f\frac{k_1}{k^2}\right)$. On en déduit les relations $u = -v_m\frac{\omega}{f}\ \sin\varphi(\underline{x},t)$, $v = v_m\ \cos\varphi(\underline{x},t)$ et $w = v_m\frac{\omega k_1}{f k_3}\ \sin\varphi(\underline{x},t)$ avec $\varphi(\underline{x},t) = \underline{k}\cdot\underline{x} - \omega t = k_1 x + k_3 z - \omega t$. Donc $u_r = -v_m\frac{\omega}{f}$ et $w_r = v_m\frac{\omega}{f}\frac{k_1}{k_3}$. **11)**On a $\tilde{p} = v_m\rho_0\frac{fk_1}{k^2}\sin\varphi(\underline{x},t)$. **12)**Comme $k_1 = k\cos\theta$ et $k_3 = k\sin\theta$, on peut écrire $\underline{U}_d = v_m[-\sin\theta\,\underline{e}^{(1)} + \cos\theta\,\underline{e}^{(3)}]\sin\varphi(\underline{x},t) + v_m\,\underline{e}^{(2)}\cos\varphi(\underline{x},t) = v_m[\cos\varphi(\underline{x},t)\,\underline{e}^{(2)} + \sin\varphi(\underline{x},t)\,\underline{e}_\theta]$. **13)**On a donc $a = v_m$. **14)**Lorsque l'amplitude des ondes est petite, on peut remplacer $\underline{x}$ par sa position moyenne $\underline{x}_0$ dans le second membre de l'équation $\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = \underline{U}(\underline{x}_0,t)$. Les trajectoires sont alors des cercles dans le plan $(\underline{e}^{(2)}, \underline{e}_\theta)$ normal à $\underline{k}$.

Vitesse de groupe

15) Pour la relation $\omega = \Omega(\underline{k}) = f|\sin\theta|$, le calcul du gradient par rapport à $\underline{k}$ peut être effectué en utilisant les coordonnées polaires (k,θ). On suppose tout d'abord $\sin\theta \geq 0$. On obtient alors $\underline{c}_g(\underline{x}) = \underline{\text{grad}}_k\Omega_d(\underline{k}) = \partial\Omega_d/\partial k\ \underline{e}_k + (1/k)\partial\Omega_d/\partial\theta\ \underline{e}_\theta = (f\cos\theta/k)\underline{e}_\theta = (\omega/k)\text{cotg}\,\theta\underline{e}_\theta$. On obtient l'expression $\underline{c}_g(\underline{k}) = -(f\cos\theta/k)\ \underline{e}_\theta = (\omega/k)\text{cotg}\,\theta\ \underline{e}_\theta$ à partir de la relation de dispersion $\omega = \Omega_g(\underline{k}) = -f\sin\theta$. D'où $\underline{c}_g(\underline{k}) = (\omega/k)\text{cotg}\,\theta\ \underline{e}_\theta$. Le cas $\sin\theta \leq 0$ s'obtient à partir du cas $\sin\theta \geq 0$ par symétrie par rapport à l'axe des x. **16)**La vitesse de phase est définie par $\underline{c}_\varphi(\underline{k}) = (\omega/k)\underline{e}_k$. On a donc $\underline{c}_\varphi(\underline{k})\cdot\underline{c}_g(\underline{k}) = 0$. La vitesse de groupe est normale à la vitesse de phase et donc au vecteur d'onde. **17)**L'énergie se propage avec la vitesse de groupe. On a donc $\beta = \theta_0$ avec $\theta_0 = \arcsin(\omega_0/f)$.

Flux d'énergie

18) On a $\frac{dV}{dt} = \rho_0\, g\, w$ et div $(P_0\,\underline{U}) = -\rho_0\, g\, w$ puisque div $\underline{U} = 0$ et $\frac{dP_0}{dt} = -\rho\, g$, donc $\frac{dV}{dt} + \text{div}\ (P_0\,\underline{U}) = 0$. Comme $(\Omega_0 \wedge \underline{U})\cdot\underline{U} = 0$, l'équation de bilan de l'énergie cinétique s'écrit $\frac{1}{2}\rho_0\frac{d}{dt}\underline{U}^2 = -\underline{U}\cdot\underline{\text{grad}}\ P - \rho_0 g w = -\text{div}\ (P\underline{U}) - \frac{dV}{dt}$ avec $V = \rho_0 g z$. D'où $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho_0\underline{U}^2 + V) + \text{div}\ [(\frac{1}{2}\rho_0\underline{U}^2 + V)\underline{U} + \tilde{p}\underline{U} + P_0\underline{U}] = 0$. On en déduit $\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}\ (W\underline{U} + \underline{I}) = 0$ avec $\underline{I} = \tilde{p}\underline{U}$. Dans le cas linéarisé, on a $\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}\ (\underline{I}) = 0$. **19)**Comme $\underline{U}(\underline{x},t) = \text{Re}\left[\underline{U}_m e^{i\underline{k}\cdot\underline{x} - i\omega t}\right]$ avec $\underline{U}_m = (u_m, v_m, w_m)$, on a $\langle W\rangle^T = \frac{1}{4}\rho_0(|u_m|^2 + |v_m|^2 + |w_m|^2)$ avec $u_m = i(\omega/f)v_m$ et $w_m = -i(\omega/f)(k_1/k_3)v_m$. On a donc $\langle W\rangle^T = \frac{1}{4}\rho_0|v_m|^2\left(\frac{\omega^2}{f^2} + 1 + \frac{\omega^2}{f^2}\frac{k_1^2}{k_3^2}\right) = \frac{1}{4}\rho_0|v_m|^2\left(\frac{k_3^2}{k^2} + 1 + \frac{k_1^2}{k^2}\right) = \frac{1}{2}\rho_0|v_m|^2$. **20)**Comme $\tilde{p}(\underline{x},t) = \text{Re}\left[p_m e^{i\underline{k}\cdot\underline{x} - i\omega t}\right]$ avec $p_m = -i\rho_0\frac{fk_1}{k^2}v_m$, on a $\langle\underline{I}\rangle^T = \langle\tilde{p}\underline{U}\rangle^T = \frac{1}{2}\rho_0|v_m|^2\left(-\frac{\omega k_1}{k^2}, 0, \frac{k_1^2}{k_3 k_2}\right) =$

$\frac{1}{2}\rho_0|v_m|^2\frac{\omega}{k}\frac{k_1}{k_3}\left(-\frac{k_3}{k},0,\frac{k_1}{k}\right)$. En conclusion, $\langle \underline{I}\rangle^T = \frac{1}{2}\rho_0|v_m|^2\frac{\omega}{k}\mathrm{cotg}\,\theta\underline{e}_\theta = \langle W\rangle^T\,\underline{c}_g(\underline{k})$. Comme pour les autres exemples d'ondes, le flux d'énergie moyenné sur une période est égale à l'énergie moyennée multipliée par la vitesse de groupe.