

COURS ÉCRIT

1	Équations de conservation de l'énergie	1
2	Relations de dispersion et vitesses de groupe	6
3	Flux d'énergie des ondes monochromatiques	9

Introduction

On considère trois modèles d'écoulement décrivant respectivement les ondes sonores, les ondes de gravité internes et les ondes de surface. Pour chacun, on calcule l'énergie volumique $W(\underline{x}, t)$ du fluide et le flux d'énergie $\underline{I}(\underline{x}, t)$ à travers l'écriture de l'équation de conservation de l'énergie. Les ondes décrivent des petites oscillations autour d'un état stationnaire. On rappelle leurs relations de dispersion obtenues à partir des équations linéarisées autour des équilibres et on définit les notions de vitesse de phase \underline{c}_φ et de vitesse de groupe \underline{c}_g . On indique alors l'expression quadratique de l'énergie volumique et de son flux à l'ordre dominant de l'approximation linéaire.

On montre ensuite que pour une onde monochromatique de vecteur d'onde \underline{k} l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont égales enIl est d'autre part nécessaire de bien moyenne sur une période. On montre de plus la relation $\langle \underline{I} \rangle^T = \underline{c}_g(\underline{k}) \langle W \rangle^T$ où $\langle \cdot \rangle^T$ désigne la moyenne sur une période. Cette relation permet d'interpréter la vitesse de groupe \underline{c}_g comme étant la vitesse de propagation de l'énergie.

1 Équations de conservation de l'énergie

Dans tout ce qui suit, on note ρ la masse volumique, \underline{U} le champ de vitesse, p la pression, e l'énergie interne spécifique (par unité de masse), Θ la température et s l'entropie spécifique. L'opérateur dérivée particulaire est noté $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} +$

$\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}}$.

1.1 Conservation de l'énergie des ondes sonores

Le modèle permettant d'appréhender les ondes sonores est constitué des équations d'Euler qui s'écrivent :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{U}, \quad \rho \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\text{grad}} p \quad \text{et} \quad \rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \underline{U} \quad (1)$$

avec la loi d'état $p = \mathcal{P}(\rho, s)$ et la relation de Gibbs $\frac{de}{dt} = \Theta \frac{ds}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}$. Cette dernière relation, combinée à l'équation de bilan de l'énergie interne et à l'équation de conservation de la masse, permet d'écrire $\frac{ds}{dt} = 0$.

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} \underline{U}^2 \right) + \operatorname{div} (p \underline{U}) &= \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 \right) + \operatorname{div} \left[\left(\rho e + \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 \right) \underline{U} + p \underline{U} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Le flux (sortant) de la densité d'énergie volumique $\rho e + \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2$ est donc le vecteur $p \underline{U}$.

En décomposant $p = p_0 + \tilde{p}$, les relations $\frac{dp}{dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{U}$ et $\rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \underline{U}$ permettent d'écrire l'équation de bilan de l'énergie interne sous la forme

$$\begin{aligned} \rho \frac{de}{dt} + \operatorname{div} (p \underline{U}) &= -p \operatorname{div} \underline{U} + \operatorname{div} (p \underline{U}) = -\tilde{p} \operatorname{div} \underline{U} + \operatorname{div} (\tilde{p} \underline{U}) \\ &= \tilde{p} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} (\tilde{p} \underline{U}). \end{aligned} \quad (3)$$

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit alors

$$\frac{\tilde{p}}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \underline{U}^2 \right) + \operatorname{div} (\tilde{p} \underline{U}) = 0. \quad (4)$$

On s'intéresse maintenant aux petites oscillations $(\rho, p, s, \underline{U}) = (\rho_0, p_0, s_0, \underline{0}) + (\tilde{\rho}, \tilde{p}, \tilde{s}, \underline{U})$ autour de l'équilibre dans le cas où $s = s_0$ reste constant (il suffit que \tilde{s} soit nul à un certain instant). On note $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s (\rho_0, s_0)$ la quantité qui s'avère être le carré de la vitesse du son (voir l'expression de la relation de dispersion présentée plus loin). En ne retenant que l'ordre dominant de l'approximation linéaire on obtient $\tilde{p} = c^2 \tilde{\rho}$ à partir de l'équation d'état de la pression, puis (en négligeant les termes quadratiques en $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}}$)

$$\frac{c^2}{\rho_0} \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \underline{U}^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{c^2}{\rho_0^2} \tilde{\rho}^2 + \underline{U}^2 \right) \right] = -\operatorname{div} (\tilde{p} \underline{U}). \quad (5)$$

On définit alors l'énergie acoustique par

$$W = \frac{1}{2}\rho_0 \left(\frac{c^2}{\rho_0^2} \tilde{\rho}^2 + \underline{U}^2 \right) = \frac{1}{2}\rho_0 \left(\frac{1}{c^2 \rho_0^2} \tilde{p}^2 + \underline{U}^2 \right) \quad (6)$$

et le flux associé $\underline{I} = \tilde{p} \underline{U}$, ce qui permet d'écrire l'équation de conservation de l'énergie du modèle linéaire sous la forme

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div } \underline{I} = 0. \quad (7)$$

1.2 Conservation de l'énergie des ondes de gravité internes

Le modèle permettant d'appréhender les ondes de gravité interne est constitué des équations d'Euler dans le cadre de l'approximation de Boussinesq qui s'écrivent

$$\text{div } \underline{U} = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \rho_r \frac{d\underline{U}}{dt} = -\text{grad } p - \rho g \underline{e}^{(3)} \quad (8)$$

ou encore

$$\text{div } \underline{U} = 0, \quad \frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \frac{N^2}{g} \rho_r w \quad \text{et} \quad \rho_r \frac{d\underline{U}}{dt} = -\text{grad } \tilde{p} - \tilde{\rho} g \underline{e}^{(3)} \quad (9)$$

où $\tilde{\rho}$ est défini par $\rho = \rho_0(z) + \tilde{\rho}$ et \tilde{p} par $p = p_0(z) + \tilde{p}$. Les profils verticaux $\rho_0(z)$ et $p_0(z)$ sont supposés vérifier $\frac{d}{dz} p_0(z) = -\rho_0(z) g$, si bien que $\tilde{\rho}$ et \tilde{p} sont les champs de masse volumique et de pression d'une perturbation de l'équilibre hydrostatique. La masse volumique de référence ρ_r est supposée être représentative du profil $\rho_0(z)$. La fréquence de Brunt-Väisälä N est définie par la relation $N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_r} \frac{d\rho_0}{dz}}$. On suppose ici qu'elle est constante.

L'équation de bilan de l'énergie interne $\rho \frac{de}{dt} = -p \text{div } \underline{U}$ se réduit à $\frac{de}{dt} = 0$ pour ce modèle. En utilisant ce résultat et en multipliant par \underline{U} l'équation de quantité de mouvement de l'approximation de Boussinesq, l'équation de conservation de l'énergie $\rho_r e + \frac{1}{2}\rho_r \underline{U}^2$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_r e + \frac{1}{2}\rho_r \underline{U}^2 \right) + \text{div} \left[\left(\rho_r e + \frac{1}{2}\rho_r \underline{U}^2 \right) \underline{U} + \tilde{p} \underline{U} \right] = \\ \rho_r \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2}\underline{U}^2 \right) + \text{div} (\tilde{p} \underline{U}) = -\tilde{\rho} g w. \end{aligned} \quad (10)$$

En utilisant la relation $\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \frac{N^2}{g} \rho_r w$, le dernier terme se transforme en $\tilde{\rho} g w = \frac{g^2}{2\rho_r N^2} \frac{d}{dt} (\tilde{\rho}^2)$. L'équation de conservation de l'énergie totale s'écrit donc

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}\rho_r \left(\frac{g^2}{\rho_r^2 N^2} \tilde{\rho}^2 + \underline{U}^2 \right) \right] + \text{div} (\tilde{p} \underline{U}) = 0. \quad (11)$$

En notant

$$W = \frac{1}{2}\rho_r \left(\frac{g^2}{\rho_r^2 N^2} \tilde{\rho}^2 + \underline{U}^2 \right) \quad (12)$$

et $\underline{I} = \tilde{p}\underline{U}$, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit $\frac{dW}{dt} + \text{div } \underline{I} = 0$. Si l'on considère maintenant les petites oscillations $(\rho, p, \underline{U}) = [\rho_0(z), p_0(z), \underline{Q}] + (\tilde{\rho}, \tilde{p}, \underline{U})$ autour de l'état d'équilibre, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit, à l'ordre dominant

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div } \underline{I} = 0 . \quad (13)$$

1.3 Conservation de l'énergie des ondes de surface

Le modèle permettant d'appréhender les ondes de surface est constitué des équations d'Euler incompressibles à surface libre qui s'écrivent

$$\text{div } \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \rho_0 \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\text{grad}} p - \rho_0 g \underline{e}^{(3)} \quad (14)$$

avec les conditions aux limites $w = 0$ sur le fond plat d'équation $z = -h$ et $\frac{d\eta}{dt} = w$ et $p = p_a$ sur la surface libre d'équation $z = \eta(x, y, t)$. La masse volumique ρ_0 est donc constante et η désigne l'élévation de la surface libre par rapport à un niveau de référence $z = 0$ arbitraire. La pression atmosphérique p_a est supposée constante.

Compte tenu de l'incompressibilité, l'énergie interne vérifie $\frac{de}{dt} = 0$. On remarque que le champ de forces volumiques $-\rho_0 g \underline{e}^{(3)} = -\underline{\text{grad}} V$ dépend du potentiel $V = \rho_0 g z$. L'équation de conservation de l'énergie totale $\rho_0 e + \frac{1}{2}\rho_0 \underline{U}^2 + V$ s'écrit donc

$$\frac{d}{dt} \left[\rho_0 \left(e + \frac{1}{2}\underline{U}^2 + g z \right) \right] + \text{div} (p \underline{U}) = 0 \quad (15)$$

Comme $\frac{de}{dt} = 0$ et $\text{div } \underline{U} = 0$, cette équation se réduit à

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\rho_0 \underline{U}^2 + \rho_0 g z \right) + \text{div} (p \underline{U}) = \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho_0 \underline{U}^2 \right) + \text{div} \left(\frac{1}{2}\rho_0 \underline{U}^2 \underline{U} \right) + \text{div} (\rho_0 g z \underline{U} + p \underline{U}) = 0 . \end{aligned} \quad (16)$$

On souhaite alors intégrer cette équation sur la verticale et obtenir une équation de conservation pour une énergie et un flux intégrés sur la verticale. Il est nécessaire pour cela d'établir quelques identités portant sur la commutation des opérateurs de dérivation et d'intégration sur la verticale.

Pour tout champ continu b , la formule de Leibniz, qui permet de dériver les intégrales dont les bornes varient (ici en t), permet d'écrire

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial b}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-h}^{\eta} b dz \right) - b(x, y, \eta, t) \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, y, t). \quad (17)$$

Cette même formule de Leibniz, appliquée aux variables spatiales (ici x et y), entraîne la relation

$$\int_{-h}^{\eta} \operatorname{div}_H (b \underline{U}_H) dz = \operatorname{div}_H \left(\int_{-h}^{\eta} b \underline{U}_H dz \right) - \left[b u \frac{\partial \eta}{\partial x} + b v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] (x, y, \eta, t) \quad (18)$$

où $\underline{U}_H = (u, v)$ est la projection horizontale du vecteur vitesse $\underline{U} = (u, v, w)$ et div_H l'opérateur de divergence horizontale.

En utilisant l'intégration $\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial z} (b w) dz = [b w]_{-h}^{\eta}$, ainsi que les relations $\frac{d\eta}{dt} = w$ pour $z = \eta$ et $w = 0$ pour $z = -h$, on peut alors écrire

$$\int_{-h}^{\eta} \operatorname{div} (b \underline{U}) dz = \operatorname{div}_H \left(\int_{-h}^{\eta} b \underline{U}_H dz \right) + b(x, y, \eta, t) \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, y, t). \quad (19)$$

On déduit donc de (17) et (19) la relation

$$\int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial b}{\partial t} + \operatorname{div} (b \underline{U}) \right] dz = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-h}^{\eta} b dz \right) + \operatorname{div}_H \left(\int_{-h}^{\eta} b \underline{U}_H dz \right). \quad (20)$$

En posant $b = \left(\frac{1}{2}\rho_0 \underline{U}^2\right)$ dans cette équation, on obtient la relation

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho_0 \underline{U}^2 \right) + \operatorname{div} \left(\frac{1}{2}\rho_0 \underline{U}^2 \underline{U} \right) \right] dz = \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{-h}^{\eta} \left(\frac{1}{2}\rho_0 \underline{U}^2 \right) dz \right] + \operatorname{div}_H \left[\int_{-h}^{\eta} \left(\frac{1}{2}\rho_0 \underline{U}^2 \right) \underline{U}_H dz \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

On définit ensuite la "pression dynamique" \tilde{p} par la relation $p = p_a - \rho_0 g z + \tilde{p}$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\eta} \operatorname{div} (\rho_0 g z + p \underline{U}) dz &= \int_{-h}^{\eta} \operatorname{div} (\tilde{p} \underline{U}) dz \\ &= \operatorname{div}_H \left(\int_{-h}^{\eta} \tilde{p} \underline{U}_H dz \right) + \tilde{p}(x, y, \eta, t) \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{aligned} \quad (22)$$

où l'on a utilisé l'équation (19) avec $b = \tilde{p}$.

En intégrant l'énergie $\frac{1}{2}\rho_0 \underline{U}^2 + \rho_0 g z$ sur la verticale on obtient l'expression de l'énergie de la couche fluide par unité de surface

$$\int_{-h}^{\eta} \left(\frac{1}{2}\rho_0 \underline{U}^2 + \rho_0 g z \right) dz = \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{1}{2}\rho_0 \underline{U}^2 \right) dz + \frac{1}{2}\rho_0 g (\eta^2 - h^2). \quad (23)$$

En notant $W = \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} \rho_0 \underline{U}^2 dz + \frac{1}{2} \rho_0 g \eta^2$ et $\underline{I} = \int_{-h}^{\eta} \tilde{p} \underline{U}_H dz$ et en rassemblant les résultats (21), (22) et (23) dans l'équation (16), on obtient la relation

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}_H (\underline{N} + \underline{I}) = [\rho_0 g \eta - \tilde{p}(x, y, \eta, t)] \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (24)$$

avec $\underline{N} = \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{1}{2} \rho_0 \underline{U}^2 \right) \underline{U}_H dz$.

Si on considère les petites oscillations $(\eta, p, \underline{U}) = (0, p_a - \rho_0 g z, \underline{0}) + (\eta, \tilde{p}, \underline{U})$ autour de l'équilibre, la linéarisation du modèle permet de considérer des écoulements irrotationnels dont le champ de vitesse s'écrit donc $\underline{U} = \text{grad } \phi$. Le système conduit à $\Delta \phi = 0$ et $\tilde{p} = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$ partout, $\frac{\partial \eta}{\partial t} = w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g \eta$ en $z = 0$ (et non plus $z = \eta$) et $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ en $z = -h$. En approximant les intégrales de la forme \int_{-h}^{η} par l'intégrale approchée \int_{-h}^0 , dans la mesure où η est petit, on peut écrire

$$W = \frac{1}{2} \rho_0 \int_{-h}^0 (\text{grad } \phi)^2 dz + \frac{1}{2} \rho_0 g \eta^2 \quad \text{et} \quad \underline{I} = -\rho_0 \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \text{grad}_H \phi dz. \quad (25)$$

À l'ordre dominant de l'approximation linéaire, le second membre de l'équation (24) s'annule et le terme de flux \underline{N} est négligeable. L'équation de conservation de l'énergie moyennée sur la verticale s'écrit alors

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}_H \underline{I} = 0. \quad (26)$$

2 Relations de dispersion et vitesses de groupe

Pour chacun des modèles d'écoulements considérés, on s'est intéressé aux petites oscillations autour d'un état d'équilibre simple. Les ondes correspondantes sont alors régies par les systèmes d'équations linéarisées autour de cet état de base. Comme les équations linéaires considérées sont invariantes par translations en espace (horizontales seulement pour les ondes de surface), on peut considérer des solutions monochromatiques complexes en $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}$ de vecteur d'onde \underline{k} et de pulsation ω . La recherche d'amplitudes non nulles conduit à des relations de dispersion $\omega = \Omega(\underline{k})$ et l'on choisit d'adopter la convention $\omega \geq 0$ qui repose sur le fait que les systèmes d'équations sont à coefficients réels.

La vitesse de phase d'une onde monochromatique est définie par l'expression $\underline{c}_\varphi(\underline{k}) = \frac{\omega}{k} \underline{e}_k$ où $\underline{e}_k = \underline{k}/k$ est le vecteur unitaire orienté dans la direction du vecteur d'onde \underline{k} de module k . Cette vitesse s'écrit aussi $\underline{c}_\varphi = c_\varphi \underline{e}_k$ où $c_\varphi = \frac{\omega}{k}$ est son module. C'est la vitesse à laquelle se propagent les lignes ou surfaces isophases.

Étant donnée une relation de dispersion $\omega = \Omega(\underline{k})$, on définit la vitesse de groupe par la relation

$$\underline{c}_g(\underline{k}) = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial k_1}, \frac{\partial \Omega}{\partial k_2}, \frac{\partial \Omega}{\partial k_3} \right) = \underline{\text{grad}}_k \Omega(\underline{k}) . \quad (27)$$

Cette vitesse peut être comparée à la vitesse de phase $\underline{c}_\varphi(\underline{k})$. On dit que le milieu est dispersif si ces deux vitesses diffèrent.

On rappelle ici les relations de dispersion des ondes pour les trois modèles ainsi que l'expression des amplitudes complexes des ondes monochromatiques. On calcule alors l'expression de la vitesse de groupe. Ces résultats serviront ensuite de base pour le paragraphe suivant.

2.1 Non dispersion des ondes sonores

L'étude des petites oscillations $(\rho, p, \underline{U}) = (\rho_0, p_0, \underline{0}) + (\tilde{\rho}, \tilde{p}, \underline{U})$ pour le modèle des ondes sonores conduit au système linéaire

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} \underline{U}, \quad \rho_0 \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\underline{\text{grad}} \tilde{p} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} = 0 . \quad (28)$$

On suppose que l'écoulement est irrotationnel, ce qui permet d'écrire $\underline{U} = \underline{\text{grad}} \phi$ et $\tilde{s} = 0$ (il suffit que ces propriétés soient vraies à un certain instant). La relation de dispersion des ondes planes $(\phi, \tilde{\rho}, \tilde{p}) = (\phi_m, \rho_m, p_m) e^{i\underline{k} \cdot \underline{x} - i\omega t}$ est $\omega = c k$, avec la convention $\omega \geq 0$, et les amplitudes complexes des champs oscillants vérifient

$$(\phi_m, \rho_m, p_m) = \phi_m \left(1, i \frac{\rho_0 \omega}{c^2}, i \rho_0 \omega \right) . \quad (29)$$

On a aussi $\underline{U} = \underline{U}_m e^{i\underline{k} \cdot \underline{x} - i\omega t}$ avec $\underline{U}_m = i \phi_m \underline{k}$.

On remarque que la vitesse de phase est égale à la vitesse de groupe :

$$\underline{c}_g(\underline{k}) = \underline{c}_\varphi(\underline{k}) = \frac{\omega}{k} \underline{e}_k . \quad (30)$$

Ces ondes sont non dispersives dans la mesure où vitesse de groupe et vitesse de phase sont égales.

2.2 Dispersion des ondes de gravité internes

L'étude des petites oscillations $(\rho, p, \underline{U}) = [\rho_0(z), p_0(z), 0] + (\tilde{\rho}, \tilde{p}, \underline{U})$ pour le modèle des ondes de gravité internes conduit au système linéaire

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{N^2}{g} \rho_r w \quad \text{et} \quad \rho_r \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\underline{\text{grad}} \tilde{p} - \tilde{\rho} g \underline{e}^{(3)} . \quad (31)$$

La relation de dispersion des ondes planes $(w, \tilde{\rho}, \tilde{p}) = (w_m, \rho_m, p_m) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}$ s'écrit $\omega = N |\cos \theta|$ avec $\theta = \arcsin(k_3/k)$ et l'on a

$$(w_m, \rho_m, p_m) = w_m \left(1, i\omega \frac{k^2}{g k_H^2} \rho_r, -\omega \frac{k_3}{k_H^2} \rho_r \right) \quad (32)$$

avec $k_H^2 = k_1^2 + k_2^2$.

Le calcul de la vitesse de groupe peut être effectué à partir de la relation $\Omega^2(k) = N^2 (k_1^2 + k_2^2)/(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$, ce qui conduit à la relation

$$\underline{c}_g(\underline{k}) = \frac{\omega}{k} \left(\frac{k_1}{k} \frac{k_3^2}{k_H^2}, \frac{k_2}{k} \frac{k_3^2}{k_H^2}, -\frac{k_3}{k} \right). \quad (33)$$

Ce calcul est plus simple si l'on suppose, sans perte de généralité, que $k_2 = 0$ et que l'on exprime la vitesse de groupe sous la forme intrinsèque

$$\underline{c}_g(\underline{k}) = -\frac{\omega}{k} \operatorname{tg} \theta \underline{e}_\theta = -c_\varphi(\underline{k}) \operatorname{tg} [\theta(\underline{k})] \underline{e}_\theta(\underline{k}) \quad (34)$$

où $\underline{e}_\theta = -\sin \theta \underline{e}_H + \cos \theta \underline{e}^{(3)}$ est le vecteur unitaire obtenu par rotation de $\pi/2$ de $\underline{e}_k(\underline{k}) = \underline{k}/k$ dans le plan $(\underline{e}_H, \underline{e}^{(3)})$ avec $\underline{e}_H = \underline{k}_H/k_H$. Un moyen encore plus rapide consiste à considérer l'expression de $\Omega(\underline{k})$ en fonction des coordonnées polaires (k, θ) et à remarquer que $\Omega(\underline{k})$ ne dépend que de θ . On trouve alors $\underline{c}_g(\underline{k}) = (1/k)(\partial\Omega/\partial\theta) \underline{e}_\theta$ ce qui redonne le résultat.

En comparant avec la vitesse de phase $\underline{c}_\varphi(\underline{k}) = \frac{\omega}{k} \underline{e}_k$ on remarque que $\underline{c}_g \cdot \underline{c}_\varphi = 0$: la vitesse de groupe est orthogonale à la vitesse de phase.

2.3 Dispersion des ondes de surface

L'étude des petites perturbations $(\eta, p, \underline{U}) = (0, p_a - \rho_0 g z, \underline{0}) + (\eta, \tilde{p}, \underline{\operatorname{grad}} \phi)$ du modèle des ondes de surface autour de l'équilibre conduit au système linéaire $\Delta\phi = 0$ avec les conditions aux limites $\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$ en $z = -h$ et

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} = -g \eta \quad \text{en } z = 0. \quad (35)$$

La relation de dispersion des ondes planes $(\phi, \eta) = [\Phi(z), \eta_m] e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)}$ est $\omega = \sqrt{g k \tanh(k h)}$ et l'on a

$$\Phi(z) = \Phi_m \cosh[k(z + h)] \quad \text{et} \quad (\Phi_m, \eta_m) = \Phi_m \left(1, i \frac{\omega}{g} \cosh(k h) \right). \quad (36)$$

Le calcul de la vitesse de groupe conduit à

$$\underline{c}_g(\underline{k}) = \underline{c}_\varphi(\underline{k}) \left(\frac{1}{2} + \frac{k h}{\sinh(2 k h)} \right). \quad (37)$$

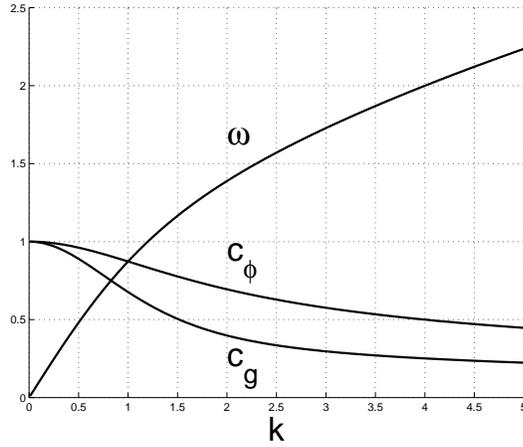


Figure 1: Courbes $\omega = \Omega(k)$, $c_\varphi(k)$ et $c_g(k)$ pour les ondes de surface.

La vitesse de groupe est donc parallèle à la vitesse de phase $c_\varphi(\underline{k}) = \frac{\omega}{k} \underline{e}_k$ avec $\underline{e}_k = \underline{k}/k$. On note que $c_g \leq c_\varphi$, que $c_g = \frac{1}{2}c_\varphi$ lorsque $kh \rightarrow \infty$, c'est-à-dire lorsque le milieu devient très profond et que $c_g = c_\varphi = \sqrt{gh}$ lorsque $kh \rightarrow 0$, c'est-à-dire lorsque le milieu devient peu profond.

3 Flux d'énergie des ondes monochromatiques

Pour chacun des trois modèles (ondes sonores, ondes de gravité internes, ondes de surface) nous avons déterminé l'énergie $W(\underline{x}, t)$ des ondes. On peut remarquer que cette énergie se décompose toujours en la somme d'une énergie cinétique $W_{\text{cin}}(\underline{x}, t)$ et d'une énergie potentielle $W_{\text{pot}}(\underline{x}, t)$. Nous avons aussi déterminé l'expression du flux d'énergie que nous avons noté $\underline{I}(\underline{x}, t)$.

Pour chaque modèle, nous allons considérer une onde monochromatique de vecteur d'onde \underline{k} et de pulsation $\omega = \Omega(\underline{k})$ et définir la moyenne d'un champ b sur une période $T = 2\pi/\omega$ par la relation

$$\langle b \rangle^T = \frac{1}{T} \int_0^T b \, dt. \quad (38)$$

On s'intéresse alors aux quantités $\langle W \rangle^T = \langle W_{\text{pot}} \rangle^T + \langle W_{\text{cin}} \rangle^T$ et $\langle \underline{I} \rangle^T$ qui sont des quantités quadratiques. Il est donc intéressant de vérifier qu'étant donnés deux champs

$$b_1(\underline{x}, t) = \text{Re} \left[b_{1m} e^{(i\underline{k} \cdot \underline{x} - i\omega t)} \right] \quad \text{et} \quad b_2(\underline{x}, t) = \text{Re} \left[b_{2m} e^{(i\underline{k} \cdot \underline{x} - i\omega t)} \right], \quad (39)$$

le terme $\langle b_1 b_2 \rangle^T$ est indépendant de l'espace (et du temps) et s'écrit

$$\langle b_1 b_2 \rangle^T = \frac{1}{4} (b_{1m} b_{2m}^* + b_{1m}^* b_{2m}) . \quad (40)$$

En particulier, on a la relation $\langle b^2 \rangle^T = \frac{1}{2} |b_m|^2$.

3.1 Flux d'énergie d'une onde sonore

Dans le cas des ondes sonores, de relation de dispersion $\omega = c k$, on a $W_{\text{cin}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \rho_0 \underline{U}^2$ et $W_{\text{pot}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \tilde{\rho}^2$. Pour une onde monochromatique telle que $\phi = \phi_m e^{i \underline{k} \cdot \underline{x} - i \omega t}$ les relations $\underline{U}_m = i \phi_m \underline{k}$ et $\rho_m = i(\rho_0 \omega / c^2) \phi_m$ permettent d'exprimer

$$\langle W_{\text{cin}} \rangle^T = \frac{1}{4} \rho_0 k^2 |\phi_m|^2 \quad \text{et} \quad \langle W_{\text{pot}} \rangle^T = \frac{1}{4} \frac{c^2}{\rho_0} |\rho_m|^2 = \langle W_{\text{cin}} \rangle^T , \quad (41)$$

ce qui conduit à

$$\langle W \rangle^T = \frac{1}{2} \rho_0 k^2 |\phi_m|^2 . \quad (42)$$

La relation $p_m = i \rho_0 \omega \phi_m$ permet d'exprimer la moyenne du flux d'énergie $\underline{I} = \tilde{p} \underline{U}$ sous la forme

$$\begin{aligned} \langle \underline{I} \rangle^T &= \frac{1}{4} p_m \underline{U}_m^* + \frac{1}{4} p_m^* \underline{U}_m \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 \omega |\phi_m|^2 \underline{k} = \frac{1}{2} \rho_0 k^2 |\phi_m|^2 \frac{\omega}{k} (\underline{k}/k) = \underline{c}_g(\underline{k}) \langle W \rangle^T \end{aligned} \quad (43)$$

où la vitesse de groupe est $\underline{c}_g(\underline{k}) = \underline{c}_\varphi(\underline{k}) = c \underline{e}_k(\underline{k})$.

3.2 Flux d'énergie d'une onde de gravité interne

Dans le cas des ondes internes, de relation de dispersion $\omega = N \frac{k_H}{k}$, on a

$$W_{\text{cin}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \rho_r \underline{U}^2 \quad \text{et} \quad W_{\text{pot}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \frac{g^2}{\rho_r N^2} \tilde{\rho}^2 . \quad (44)$$

Pour une onde monochromatique $(w, \tilde{\rho}, \tilde{p}) = (w_m, \rho_m, p_m) e^{i \underline{k} \cdot \underline{x} - i \omega t}$ avec $(u, v) = (u_m, v_m) e^{i \underline{k} \cdot \underline{x} - i \omega t}$, on a les relations

$$u_m = -w_m \frac{k_1 k_3}{k_H^2} , \quad v_m = -w_m \frac{k_2 k_3}{k_H^2} \quad \text{et} \quad \rho_m = i \omega k^2 \rho_r w_m \frac{1}{g k_H^2} . \quad (45)$$

On peut alors exprimer

$$\langle W_{\text{cin}} \rangle^T = \frac{1}{4} \rho_r (|u_m|^2 + |v_m|^2 + |w_m|^2) = \frac{1}{4} \rho_r |w_m|^2 k^2 / k_H^2$$

$$\text{et } \langle W_{\text{pot}} \rangle^T = \frac{1}{4} (g^2 / \rho_r N^2) |\rho_m|^2 = \langle W_{\text{cin}} \rangle^T$$

ce qui conduit à

$$\langle W \rangle^T = \frac{1}{2} \rho_r |w_m|^2 k^2 / k_H^2. \quad (46)$$

La relation $p_m = i \omega \rho_r w_m k_3 / k_H^2$ permet d'exprimer la moyenne du flux d'énergie $\underline{I} = \tilde{p} \underline{U}$ sous la forme

$$\langle \underline{I} \rangle^T = \frac{1}{4} p_m \underline{U}_m^* + \frac{1}{4} p_m^* \underline{U}_m = \underline{c}_g(\underline{k}) \langle W \rangle^T \quad (47)$$

où la vitesse de groupe est $\underline{c}_g(\underline{k}) = \frac{\omega}{k} [(k_1/k)(k_3^2/k_H^2), (k_2/k)(k_3^2/k_H^2), -k_3/k]$.

3.3 Flux d'énergie d'une onde de surface

Dans le cas des ondes de surface, de relation de dispersion $\omega = \sqrt{g k \tanh(kh)}$, on a

$$W_{\text{cin}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \rho_0 \int_{-h}^0 (\text{grad } \phi)^2 dz \quad \text{et} \quad W_{\text{pot}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \rho_0 g \eta^2. \quad (48)$$

Pour une onde monochromatique telle que

$$(\eta, \phi) = (\eta_m, \Phi_m \cosh[k(z+h)]) e^{i k_1 x + i k_2 y - i \omega t} \quad (49)$$

les relations

$$\begin{aligned} (u, v) &= i \Phi_m \cosh[k(z+h)] (k_1, k_2) e^{i k_1 x + i k_2 y - i \omega t} \\ \text{et } w &= \Phi_m k \sinh[k(z+h)] e^{i k_1 x + i k_2 y - i \omega t} \end{aligned}$$

permettent d'exprimer

$$\begin{aligned} \langle W_{\text{cin}} \rangle^T &= \frac{1}{4} \rho_0 \int_{-h}^0 (|u|^2 + |v|^2 + |w|^2) dz \\ &= \frac{1}{4} \rho_0 k^2 |\Phi_m|^2 \int_{-h}^0 \left\{ \cosh^2[k(z+h)] + \sinh^2[k(z+h)] \right\} dz \\ &= \frac{1}{8} \rho_0 |\Phi_m|^2 k \sinh(2kh) \end{aligned} \quad (50)$$

En utilisant la relation de dispersion, et $\eta_m = i \frac{\omega}{g} \cosh(kh) \Phi_m$, on peut écrire

$$|\eta_m|^2 = \frac{\omega^2}{g^2} \cosh^2(kh) |\Phi_m|^2 = \frac{k}{2g} \sinh(2kh) |\Phi_m|^2 \quad (51)$$

On en déduit donc que $\langle W_{\text{pot}} \rangle^T = \frac{1}{4} \rho_0 g |\eta_m|^2 = \langle W_{\text{cin}} \rangle^T$ ce qui conduit à

$$\langle W \rangle^T = \frac{1}{4} \rho_0 |\Phi_m|^2 k \sinh(2kh) = \frac{1}{2} \rho_0 g |\eta_m|^2. \quad (52)$$

La relation $p_m = i \rho_0 \omega \Phi_m \cosh[k(z+h)]$ permet d'exprimer la moyenne du flux d'énergie $\underline{I} = \tilde{p} \underline{U}_H$ sous la forme

$$\langle \underline{I} \rangle^T = \underline{c}_g(\underline{k}) \langle W \rangle^T \quad (53)$$

où la vitesse de groupe est $\underline{c}_g(\underline{k}) = (\omega/k)(\underline{k}/k) [1/2 + kh/\sinh(2kh)]$.

Conclusion

Pour les trois modèles de base décrivant les ondes sonores, les ondes de gravité internes et les ondes de surface, nous avons donné l'expression du champ d'énergie volumique $W = W_{\text{cin}} + W_{\text{pot}}$ correspondant comme étant la somme d'une énergie cinétique et d'une énergie potentielle, ainsi que celle son flux \underline{I} . À l'ordre dominant de l'approximation linéaire, ces quantités sont toujours reliées par la relation

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div } \underline{I} = 0. \quad (54)$$

Après avoir rappelé les relations de dispersion des trois types d'ondes, nous avons considéré une onde monochromatique et calculé la moyenne, sur une période T , des énergies cinétique $\langle W_{\text{cin}} \rangle^T$ et potentielle $\langle W_{\text{pot}} \rangle^T$. Ces quantités, indépendantes de l'espace, vérifient la propriété remarquable

$$\langle W_{\text{pot}} \rangle^T = \langle W_{\text{cin}} \rangle^T. \quad (55)$$

Le calcul de la moyenne $\langle \underline{I} \rangle^T$ du flux d'énergie conduit, pour chaque modèle, à la relation

$$\langle \underline{I} \rangle^T = \underline{c}_g(\underline{k}) \langle W \rangle^T \quad (56)$$

où \underline{c}_g est la vitesse de groupe de l'onde considérée. Cette expression du flux permet d'énoncer que l'énergie se propage à la vitesse de groupe.

Pour une onde monochromatique, la relation

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle W \rangle^T + \text{div } \langle \underline{I} \rangle^T = 0 \quad (57)$$

est trivialement vérifiée dans la mesure où $\langle W \rangle^T$ et $\langle \underline{I} \rangle^T$ sont indépendants de l'espace et du temps. Mais cette relation devient riche en information lorsque l'on remplace l'onde monochromatique par un paquet d'onde suffisamment dispersé et que $\langle W \rangle^T$ et $\langle \underline{I} \rangle^T$ varient (lentement) avec l'espace et le temps, comme le montre la théorie de la réfraction (non traitée dans cet article).