EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 0.1 Flux d'énergie et KdV linéaire

On s'intéresse aux solutions $u(x,t)$ de l'équation de Korteweg de Vries linéaire $\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$ dans un domaine infini 1D. On suppose que $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

1) On pose $W = \frac{1}{2}u^2$ et $I = \frac{1}{2}\alpha\, u^2 + \beta\, u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$. Écrire une équation de conservation de l'énergie associée au modèle de Korteweg de Vries linéaire.
2) On considère une onde monochromatique $u(x,t) = u_m \exp(i\, k_1\, x - i\, \omega\, t)$ solution du modèle, u_m étant une amplitude complexe constante. Calculer l'énergie moyennée sur une période notée $\langle W \rangle^T$.
3) Calculer le flux d'énergie moyenné sur une période $\langle I \rangle^T$.
4) Relier $\langle I \rangle^T$, $\langle W \rangle^T$ et la vitesse de groupe $c_g(k_1)$.

Corrigé page **??**

EXERCICE 0.2 Eaux très profondes

On s'intéresse aux ondes de surface en milieu infiniment profond. Les conditions aux limites sont alors remplacées par $\|\underline{U}\| \to 0$ pour $z \to -\infty$.

1) Que devient la relation de dispersion $\omega = \Omega(\underline{k})$ des ondes de surface en milieu infiniment profond ?
2) Expliciter les fonctions réelles $u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$, $w(x,y,z,t)$ et $\eta(x,y,t)$ associées à une onde de vecteur d'onde $\underline{k}$ et de pulsation ω.
3) En déduire que les trajectoires de ces petites oscillations sont des cercles et donner l'expression de leur rayon en fonction de leur profondeur.
4) Étant donné le mouvement $\underline{U}(\underline{x},t)$, on définit l'énergie cinétique par unité de surface par $W_{\text{cin}}(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\eta} \frac{1}{2}\rho_0\, \underline{U}^2\, dz$. Calculer l'énergie cinétique $\langle W_{\text{cin}} \rangle^T$ d'une onde monochromatique d'amplitude infinitésimale Φ_m, de vecteur d'onde (k_1,k_2) et de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
5) Étant donnée la déformation $\eta(x,y,t)$, on définit l'énergie potentielle par unité de surface par $W_{\text{pot}}(x,y,t) = \frac{1}{2}\rho_0\, g\, \eta^2$. Calculer l'énergie potentielle $\langle W_{\text{pot}} \rangle^T$ d'une onde monochromatique de vecteur d'onde (k_1,k_2).
6) On définit le flux d'énergie d'une solution $(\underline{U}, p, \eta)$ du système par la relation $\underline{I}(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\eta} \tilde{p}\, \underline{\text{grad}}_H \phi\, dz$ où $\underline{\text{grad}}_H$ est le gradient horizontal et $\tilde{p} = p - p_a + \rho_0\, g\, z$. Dans cette définition, $\tilde{p}$ et ϕ désignent les expressions

réelles ($\in \mathbb{R}$) obtenues en prenant la partie réelle des expressions complexes. Montrer que pour une onde monochromatique de vecteur d'onde (k_1, k_2), on a $\langle \underline{I} \rangle^T = \underline{c}_g \ \langle W \rangle^T$ où $W = W_{\text{cin}} + W_{\text{pot}}$.

Corrigé page **??**

PROBLÈME 0.3 Ondes d'inertie 3D

Le modèle tridimensionnel permettant de mettre en évidence les ondes d'inertie 3D s'écrit

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{d\underline{U}}{dt} + 2\, \underline{\Omega}_0 \wedge \underline{U} \right) &= -\underline{\text{grad}} \left[p - \frac{1}{2} (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x})^2 \right] - \rho_0 \, g \, \underline{e}^{(3)} \\ \text{div}\, \underline{U} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

où $\underline{e}^{(3)}$ est le vecteur unitaire vertical, ρ_0 la masse volumique supposée constante, g l'intensité de la gravité supposée constante et $\underline{\Omega}_0$ un vecteur constant que l'on suppose égal à $\underline{\Omega}_0 = \frac{1}{2} \ f \ \underline{e}^{(3)}$. La notation $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}}$ désigne la dérivée particulaire. On note $\underline{x} = x \ \underline{e}^{(1)} + y \ \underline{e}^{(2)} + z \ \underline{e}^{(3)}$ et $\underline{U}(x, y, z) = u \ \underline{e}^{(1)} + v \ \underline{e}^{(2)} + w \ \underline{e}^{(3)}$. On suppose que le milieu est infini dans les trois directions et l'on se propose d'étudier les ondes linéaires décrites par ce modèle.

Relation de dispersion

1) Décrire l'écoulement de dynamique des fluides modélisé par ces équations aux dérivées partielles (ne pas confondre avec les ondes d'inertie-gravité à surface libre).
2) On note $P = p - \frac{1}{2} (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x})^2$ la pression généralisée qui prend en compte l'effet de la force centrifuge. On s'intéresse à la solution stationnaire caractérisée par $\underline{U} = \underline{0}$. Donner l'expression de la pression généralisée $P_0(z)$ associée à cet équilibre, en fixant $P_0(0) = p_{\text{ref}}$. On note alors $P = P_0 + \tilde{p}$.
3) Écrire le modèle linéarisé autour de cet état de base. Expliciter le système couplé des quatre équations aux dérivées partielles linéaires pour les champs $(u, v, w, \tilde{p})$.

On cherche des solutions non nulles du modèle linéarisé sous la forme

$$\underline{U}(\underline{x}, t) = \text{Re} \left[\underline{U}_m \ e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega\, t)} \right] \qquad \text{et} \qquad \tilde{p}(x, t) = \text{Re} \left[p_m \ e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega\, t)} \right] \quad (2)$$

avec $\underline{U}_m = (u_m, v_m, w_m) \in \mathbb{C}^3$ et $p_m \in \mathbb{C}$. On notera $\underline{k} = (k_1, k_2, k_3)$ et $k = \|\underline{k}\|$.

4) Justifier la forme des solutions recherchées.
5) Montrer que pour étudier une onde monochromatique seule, on peut supposer $k_2 = 0$ sans perte de généralité.
6) Exprimer les relations de dispersion $\omega = \Omega(\underline{k})$ que doivent satisfaire ces ondes en adoptant la convention $\omega \geq 0$.
7) Écrire ces relations de dispersion à l'aide de l'ange θ défini par $\theta = \arcsin(k_3/k)$. Indiquer le domaine de variation de θ.
8) Généraliser cette étude linéaire au cas où le vecteur Ω_0 n'est plus dans la direction verticale. Sans faire de calcul, exprimer ce que devient alors la relation de dispersion.

Champs oscillants des ondes d'inertie

9) On suppose que l'on choisit v_m réel. Montrer que ce choix ne constitue par une perte de généralité pour l'étude d'une onde monochromatique.
10) Montrer que l'on peut exprimer alors une onde monochromatique sous la forme

$$u = u_r \sin\varphi(\underline{x},t) \quad , \quad v = v_m \cos\varphi(\underline{x},t) \quad \text{et} \quad w = w_r \sin\varphi(\underline{x},t) \tag{3}$$

où $\varphi(\underline{x},t) = k_1 x + k_3 z - \omega t$ et où u_r et w_r sont des réels que l'on exprimera en fonction de v_m.
11) Donner l'expression de la pression $\tilde{p}$ associée à cette onde.
12) On suppose toujours que $k_2 = 0$ et on note $\underline{e}_k = \cos\theta\ \underline{e}^{(1)} + \sin\theta\ \underline{e}^{(3)}$ ainsi que $\underline{e}_\theta = -\sin\theta\ \underline{e}^{(1)} + \cos\theta\ \underline{e}^{(3)}$. Montrer que le champ de vitesse

$$\underline{U} = a\left[\cos\varphi(\underline{x},t)\ \underline{e}^{(2)} + \sin\varphi(\underline{x},t)\ \underline{e}_\theta\right] , \tag{4}$$

où $\varphi(\underline{x},t) = k_1 x + k_3 z - \omega t$ et a est un réel arbitraire, est celui d'une onde monochromatique.
13) Donner l'expression de a en fonction de v_m.
14) En déduire la forme des trajectoires associées à une onde monochromatique infinitésimale. Dans quel plan sont situées ces trajectoires ? Quelle est la projection orthogonale de $\underline{k}$ sur ce plan ?

Vitesse de groupe

15) Exprimer la vitesse de groupe $\underline{c}_g(\underline{k})$ en fonction du module de la vitesse de phase $c_\varphi = \omega/k$, de l'angle θ et des vecteurs unitaires du repère orthonormé $(\underline{e}_k,\ \underline{e}^{(2)},\ \underline{e}_\theta)$. On pourra utiliser les coordonnées polaires (k,θ) pour simplifier les calculs.
16) En déduire la valeur du produit scalaire $\underline{c}_g(\underline{k})\cdot\underline{c}_\varphi(\underline{k})$ où $\underline{c}_\varphi(\underline{k})$ est la vitesse de phase.

17) On fait osciller un obstacle à la fréquence $\omega_0 < f$. Loin de l'obstacle, on observe que l'énergie est concentrée sur deux cônes faisant un angle β et $\frac{\pi}{2} - \beta$ avec le vecteur $\underline{\Omega}_0$. Donner la valeur de cet angle β.

Flux d'énergie

On note $W = \frac{1}{2}\rho_0 \underline{U}^2$ et $V = \rho_0 \; g \; z$.

18) Montrer que l'on a $\frac{dV}{dt} + \text{div}\,(P_0\,\underline{U}) = 0$. En déduire $\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}\,(W\underline{U} + \underline{I}) = 0$ où $\underline{I}$ est un flux d'énergie que l'on précisera. Que devient cette équation de bilan dans le cas du modèle linéarisé ?

19) Calculer $\langle W \rangle^T$, où $\langle\rangle^T$ désigne la moyenne sur une période, en fonction de l'intensité v_m d'une onde propagative de vecteur d'onde $\underline{k}$.

20) Calculer ensuite $\langle \underline{I} \rangle^T$. Vérifier que le rapport $\langle \underline{I} \rangle^T / \langle W \rangle^T$ est un vecteur que l'on a déjà calculé et que l'on précisera.

Corrigé page **??**