Article Pédagogique Multimedia

O. Thual, APM-INPT **thu-refrac** *(2003)*

Réfraction des ondes et tracé de rayons

Objectif :

Cet article pédagogique a pour but d'étudier la réfraction des ondes dans un cadre très général.

1 Paquet d'ondes et milieux

Paquets d'ondes dispersées.

Milieux homogènes ou inhomogènes.

Exemple de l'équation des ondes.

1.1 Milieux décrits pas l'équation des ondes

1.2 Ondes de surface

1.3 Paquets d'ondes dispersés

1.1 Milieux décrits pas l'équation des ondes

Équation des ondes, en notant $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(\underline{x})\,\Delta u = 0$$

avec $u(\underline{x}, t)$ fonction de $\underline{x} = (x, y, z)$ et de t. Vitesse $c(\underline{x}) > 0$.

- Ondes électromagnétiques : $n(\underline{x}) = c(\underline{x})/c_v$ l'indice de réfraction
- Ondes sonores dans un fluide compressible : $c(\underline{x}) = \sqrt{\gamma\, r\, \Theta}$

Variante de l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \text{div}\ \left[c^2(\underline{x})\, \underline{\text{grad}}\ u\right] = 0\ .$$

- Ondes de surface, cas 2D, vitesse $c = \sqrt{g\ h}$

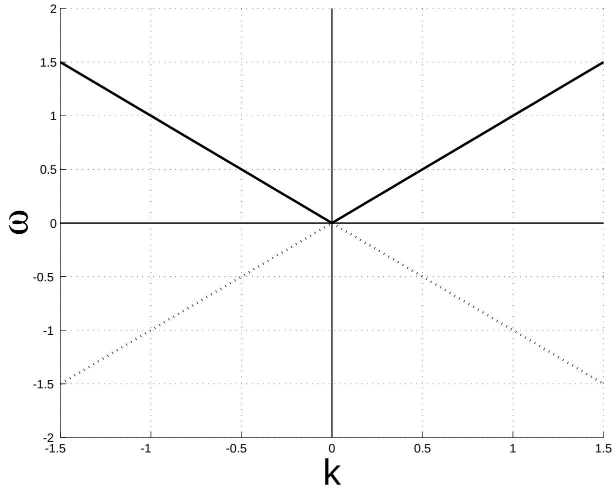
Cas homogène $c(\underline{x}) = c_0$:

Ondes planes 3D ou rectilignes 2D : $u(\underline{x}, t) = u_m \; e^{i\, \underline{k} \cdot \underline{x} - i\, \omega\, t}$ où $u_m \in \mathbb{C}$

Relation de dispersion de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \, \Delta u = 0$: $\omega^2 = c_0^2 \; k^2$ où $k = \|\underline{k}\|$

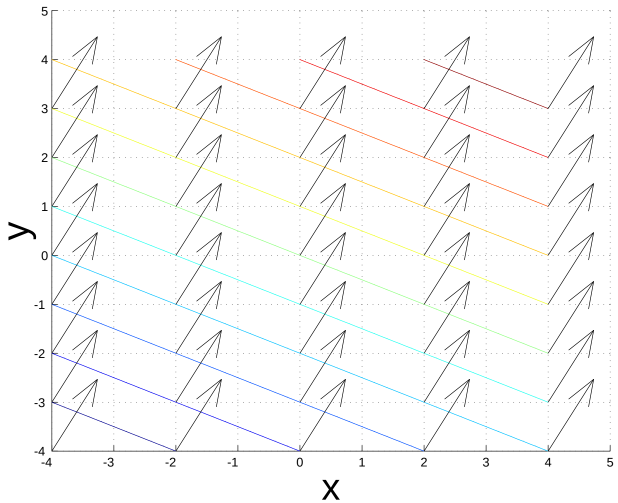
Comme $(u_m, \underline{k}, \omega) \Longleftrightarrow (u_m^*, -\underline{k}, -\omega)$, on adopte la convention $\omega > 0$:

$$\omega = \Omega(\underline{k}) = c_0 \; k$$



Rayons d'une onde plane

- Champ de phase : $\varphi(\underline{x}, t) = \underline{k} \cdot \underline{x} - \omega\, t$
- Vitesse de phase : $\underline{c}_\varphi = \frac{\omega}{k}\ \underline{k}/k = c_0\ \underline{e}_k$
- Vitesse de groupe : $\underline{c}_g(\underline{k}) = \mathrm{g\underline{rad}}_k\ \Omega(\underline{k})$ où $\mathrm{g\underline{rad}}_k = \left(\frac{\partial}{\partial k_1}, \frac{\partial}{\partial k_2}, \frac{\partial}{\partial k_3}\right)$
- Le milieu est "non-dispersif" : $\underline{c}_g = \underline{c}_\varphi = c_0\ \underline{e}_k$.

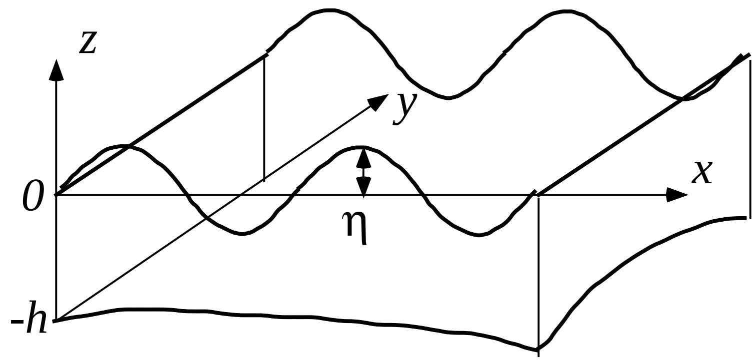


1.2 Ondes de surface

Petites oscillations d'une couche fluide à surface libre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 && \text{en } z = 0 \\ \Delta\,\phi &= 0 && \text{pour } -h(x,y) \le z \le 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\ \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\ \frac{\partial h}{\partial y} &= 0 && \text{en } z = -h(x,y) \end{aligned}$$

avec $\underline{U} = \mathrm{g}\underline{\mathrm{ra}}\mathrm{d}\ \phi$ et $\eta(x,y,t) = -\frac{1}{g}\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,y,0,t)$



Cas homogène $h(x,y) = h_0$ **:**

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad \text{en } z = 0$$
$$\Delta\,\phi = 0 \qquad \text{pour } -h_0 \le z \le 0$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad \text{en } z = -h_0$$

Solutions : $\phi = \Phi(z)\; e^{i\,\underline{k}\cdot\underline{x} - i\,\omega\,t}$ avec $\underline{k} = (k_1, k_2)$ et $\underline{x} = (x, y)$

On a : $\Phi'' - k^2\;\Phi = 0$ avec $-\omega^2\,\Phi(0) + g\;\Phi'(0) = 0$ et $\Phi'(-h_0) = 0$.

On a : $\omega^2 = g\;k\;\tanh(k\,h_0)$ et $\Phi(z) = \Phi_m\;\cosh[k(z+h)]$

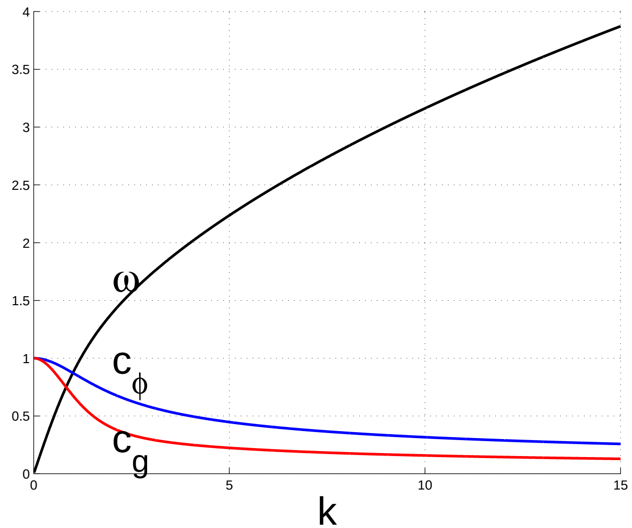
Relation de dispersion avec la convention $\omega > 0$:

$$\omega = \Omega(\underline{k}) = \sqrt{g\;k\;\tanh(k\,h_0)}\;.$$

Vitesse de phase : $\underline{c}_\varphi(\underline{k}) = c_\varphi(k)\,\underline{e}_k(\underline{k})$ avec $c_\varphi(k) = \Omega(k)/k$

Vitesse de groupe : $\underline{c}_g(\underline{k}) = \underline{\mathrm{grad}}_k\,\Omega(\underline{k}) = c_g(k)\,\underline{e}_k(\underline{k})$ avec

$$c_g = c_\varphi\left[\frac{1}{2} + \frac{k\,h_0}{\sinh(2\,k\,h_0)}\right]$$



Limite $k\,h_0 \to 0$: $\Omega(k) \sim c_0\,k$ et $c_\varphi \sim c_g \sim c_0 = \sqrt{g\,h_0}$

Limite $k\,h_0 \to \infty$: $\Omega(k) \sim \sqrt{g\,k}$ et $c_g \sim \frac{1}{2}c_\varphi \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}$

1.3 Paquets d'ondes dispersés

$$u(\underline{x}, t) = u_m(\underline{x}, t)\; e^{i\,\varphi(\underline{x},t)}\ .$$

On définit la "pulsation locale" et le "vecteur d'onde local" par :

$$\omega(\underline{x}, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\underline{x}, t) \qquad \text{et} \qquad \underline{k}(\underline{x}, t) = \mathrm{g}\underline{\mathrm{ra}}\mathrm{d}\; \varphi(\underline{x}, t)$$

- Échelles de variation $\mathcal{L}$ et $\mathcal{T}$ de $\omega(\underline{x}, t)$, $\underline{k}(\underline{x}, t)$ et $u_m(\underline{x}, t)$
- Longueurs d'ondes et périodes $L(\underline{x}, t) = \frac{2\pi}{k(\underline{x},t)}$ et $T(\underline{x}, t) = \frac{2\pi}{\omega(\underline{x},t)}$
- "Paquet d'ondes bien dispersé" si : $\mathcal{L} \gg L$ et $\mathcal{T} \gg T$

Certains résultats généraux découlent des définitions :

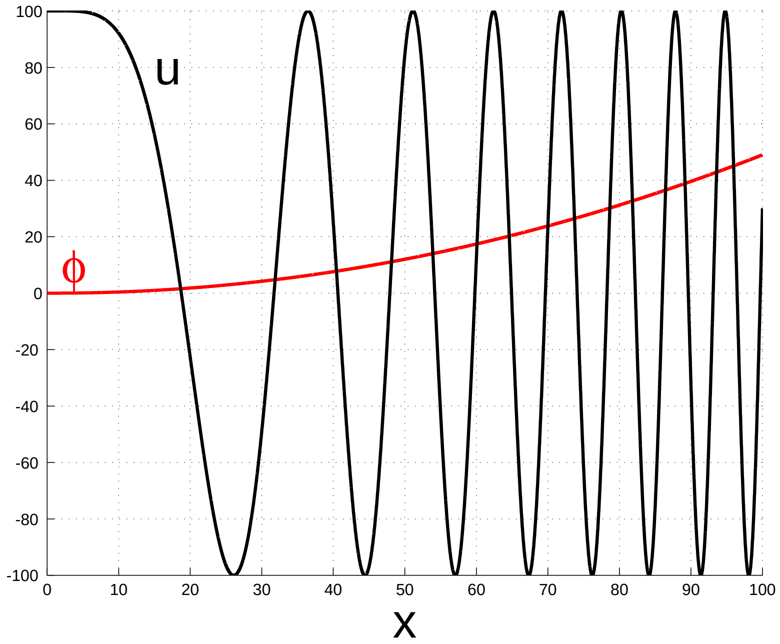
$$\underline{\mathrm{rot}}\; \underline{k} = \underline{0} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \underline{k}}{\partial t} + \mathrm{g}\underline{\mathrm{ra}}\mathrm{d}\; \omega = 0\ .$$

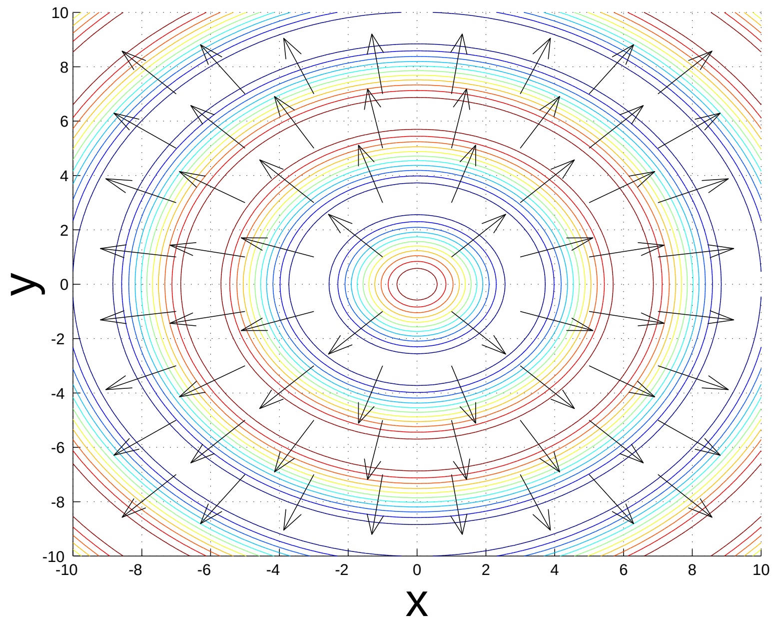
Exemples de paquets d'ondes :

$$u(\underline{x},t) = u_m(\underline{x},t)\; e^{i\varphi(\underline{x},t)} \qquad \text{avec } u_m = 1$$

a) Exemple 1D avec $\varphi(x,t) = a\left(\frac{x^2}{2} - c_0\, x\, t\right)$.

b) Exemple 2D avec $\varphi(x,y,t) = k_0\,(r - c_0\, t)$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$





2 Tracé de rayons

Équation de l'Eikonale : la pulsation locale $\omega(\underline{x}, t)$ et le vecteur d'onde local $\underline{k}(\underline{x}, t)$ vérifient une relation de dispersion locale $\Omega(\underline{k}, \underline{x})$

2.1 Équation de l'Eikonale

2.2 Tracé de rayons en milieu homogène

2.3 Tracé de rayon en milieu inhomogène

2.1 Équation de l'Eikonale

Paquets d'ondes bien dispersés : $u(\underline{x}, t) = u_m(\underline{x}, t)\, e^{i\,\varphi(\underline{x},t)}$

Pulsation $\omega(\underline{x}, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\underline{x}, t)$, vecteur d'ondes $\underline{k}(\underline{x}, t) = \mathrm{g}\underline{\mathrm{ra}}\mathrm{d}\ \varphi(\underline{x}, t)$ et amplitude $u_m(\underline{x}, t)$ considérés comme *localement* constants.

Milieu homogène : $\omega(\underline{x}, t) = \Omega[\underline{k}(\underline{x}, t)]$

Milieu inhomogène : $\omega(\underline{x}, t) = \Omega[\underline{k}(\underline{x}, t), \underline{x}]$

Exemple : équations des ondes: $\Omega(\underline{k}, \underline{x}) = c(\underline{x})\, k$ avec $k = \|\underline{k}\|$

Exemple : ondes de surface : $\Omega(\underline{k}, \underline{x}) = \sqrt{g\, k\ \tanh[k\, h(\underline{x})]}$

Équation de l'Eikonale :

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\underline{x}, t) = \Omega[\mathrm{g}\underline{\mathrm{ra}}\mathrm{d}\ \varphi(\underline{x}, t), \underline{x}]\ .$$

Approximation WKB : "ordre de l'approximation géométrique"

2.2 Tracé de rayons en milieu homogène

Paquet d'ondes dispersé $u_m(\underline{x}, t)\, e^{i\varphi(\underline{x},t)}$:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\mathrm{g\underline{rad}}\ \varphi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \omega(\underline{x}, t) = \Omega[\underline{k}(\underline{x}, t)]$$

On en déduit que le champ $\underline{k}(\underline{x}, t)$ vérifie l'équation d'advection

$$\frac{\partial \underline{k}}{\partial t} + \underline{c}_g(\underline{k}) \cdot \mathrm{g\underline{rad}}\ \underline{k} = \underline{0}$$

où $\underline{c}_g(\underline{k}) = \mathrm{g\underline{rad}}_k \Omega(\underline{k})$. On a utilisé la symétrie ${}^t\mathrm{g\underline{\underline{rad}}}\ \underline{k} = \mathrm{g\underline{\underline{rad}}}\ \underline{k}$

Famille de "trajectoires" solutions du système dynamique de $I\!\!R^6$:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{c}_g(\underline{k}) \qquad \text{et} \qquad \dot{\underline{k}} = \underline{0} \qquad \text{avec} \qquad \underline{x}(0) = \underline{a} \quad \text{et} \quad \underline{k}(0) = \underline{\kappa}$$

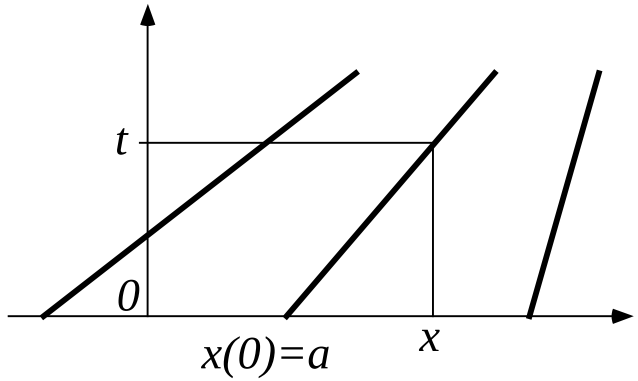
Ce sont donc des droites dans l'espace $(\underline{x}, \underline{k}) \in I\!\!R^6$ qui s'écrivent

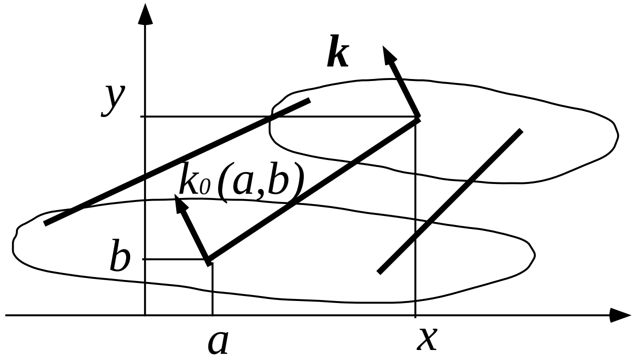
$$\underline{x}(t) = \underline{a} + \underline{c}_g(\underline{\kappa})\, t \qquad \text{et} \qquad \underline{k}(t) = \underline{\kappa}$$

Condition initiale : $\underline{k}(\underline{x},0) = \underline{k}_0(\underline{x}) = \underline{\mathrm{grad}}\ \varphi(\underline{x},0)$.

Trajectoires (rayons) $\underline{x}(t)$ issues des conditions initiales $[\underline{a}, \underline{k}_0(\underline{a})]$:

$$\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a},t) = \underline{a} + c_g[\underline{k}_0(\underline{a})]\, t$$





Fonction $\underline{A}(\underline{x},t)$ inverse pour construire $\underline{k}(\underline{x},t) = \underline{k}_0[\underline{A}(\underline{x},t)]$.
En dérivant par rapport au temps la relation $k_0(\underline{a}) = \underline{k}[\underline{X}(\underline{a},t),t]$:

$$\frac{\partial \underline{k}}{\partial t} + \underline{c}_g(\underline{k}) \cdot \underline{\mathrm{grad}}\ \underline{k} = 0$$

2.3 Tracé de rayon en milieu inhomogène

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\underline{x}, t) = \Omega[\underline{\mathrm{grad}}\ \varphi(\underline{x}, t), \underline{x}] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \omega(\underline{x}, t) = \Omega[\underline{k}(\underline{x}, t), \underline{x}]$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient l'équation

$$\frac{\partial \underline{k}}{\partial t} + \underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}) \cdot \underline{\mathrm{grad}}\ \underline{k} = -\underline{\mathrm{grad}}_x \Omega(\underline{k}, \underline{x})$$

où $\underline{\mathrm{grad}}_x$ est le gradient par rapport à $\underline{x}$ et $\underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}) = \underline{\mathrm{grad}}_k \Omega(\underline{k}, \underline{x})$.

On considère le système dynamique dans $I\!R^6$ suivant :

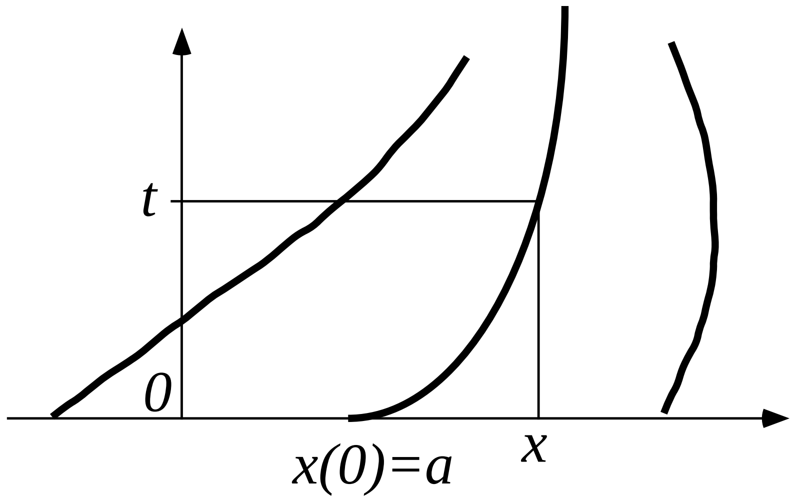
$$\dot{\underline{x}} = \underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}) = \underline{\mathrm{grad}}_k \Omega(\underline{k}, \underline{x}) \qquad \text{et} \qquad \dot{\underline{k}} = -\underline{\mathrm{grad}}_x \Omega(\underline{k}, \underline{x}) \ .$$

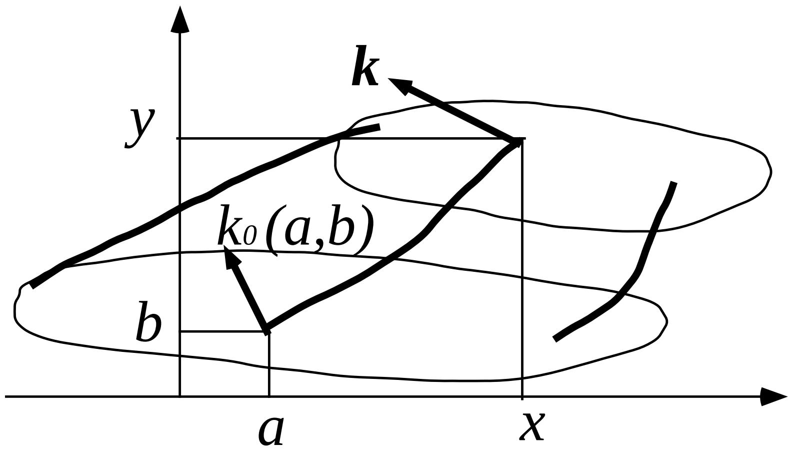
Condition initiale : $\underline{k}(\underline{x}, 0) = \underline{k}_0(\underline{x})$

Ensemble des conditions initiales $[\underline{x}(0), \underline{k}(0)] = [\underline{a}, \underline{k}_0(\underline{a})]$ où $\underline{a}$ décrit tout $I\!R^3$ ou un de ses sous-ensembles.

Trajectoires de $\mathbb{R}^6$: $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$ et $\underline{k}(t) = \underline{K}(\underline{a}, t)$

Les courbes $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$ sont les "rayons" issus de $\underline{k}_0(\underline{x})$





Si ces rayons ne se coupent pas : $\underline{a} = \underline{A}(\underline{x}, t)$ solution de $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$

On construit $\underline{k}(\underline{x}, t)$ à l'aide de la relation $\underline{k}(\underline{x}, t) = \underline{k}_0[\underline{A}(\underline{x}, t), t]$:

$$\frac{\partial \underline{k}}{\partial t} + \underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}) \cdot \mathrm{g}\underline{\mathrm{rad}}\ \underline{k} = -\mathrm{g}\underline{\mathrm{rad}}_x \Omega(\underline{k}, \underline{x})$$

On remarque finalement : que le système dynamique de $I\!R^6$

$$\underline{\dot{x}} = \underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}) = \mathrm{g\underline{rad}}_k \Omega(\underline{k}, \underline{x}) \qquad \text{et} \qquad \underline{\dot{k}} = -\mathrm{g\underline{rad}}_x \Omega(\underline{k}, \underline{x}) \; .$$

répond à la définition d'un système dynamique hamiltonien

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\underline{p}, \underline{q}) \qquad \text{et} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(\underline{p}, \underline{q})$$

en notant $\underline{q} = \underline{x}$, $\underline{p} = \underline{k}$ et $H = \Omega$. Le Hamiltonien est $\Omega(\underline{k}, \underline{x})$

Par conséquent :

le champ $\omega(\underline{x}, t) = \Omega[\underline{k}(\underline{x}, t), \underline{x}]$ est constant le long des rayons :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}) \cdot \mathrm{g\underline{rad}}\, \omega = 0$$

(propriété des systèmes dynamiques hamiltoniens autonomes)

3 Méthode WKB et réfraction

WKB (Wentzel, Kramer, Brillouin) ou WKBJ (et Jeffreys)

Développement asympotique reposant sur l'existence d'une séparation entre échelles rapides et lentes.

3.1 Approximation WKB pour l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(\underline{x})\ \Delta u = 0$$

Paquet d'onde de longueur d'onde $\sim L_0$: on écrit $c(\underline{x}) = C(\epsilon \underline{x})$:

- $C(\underline{\chi})$ varie sur une échelle d'ordre L_0
- $c(\underline{x})$ varie sur un échelle d'ordre $\mathcal{L} = \frac{L_0}{\epsilon}$

On représente les paquets d'ondes dispersés sous la forme

$$u(\underline{x}, t) = u_m(\underline{x}, t)\ e^{i\,\varphi(\underline{x},t)} = e^{i\,\varphi(\underline{x},t) + S(\underline{x},t)} = e^{\frac{i}{\epsilon}\Phi(\epsilon\,\underline{x},\epsilon\,t) + \Sigma(\epsilon\,\underline{x},\epsilon\,t)}$$

où $\Phi(\underline{\chi}, \tau)$, $\Sigma(\underline{\chi}, \tau)$ sont les champs réels définis par :

$$\varphi(\underline{x}, t) = \frac{1}{\epsilon}\Phi(\epsilon\underline{x}, \epsilon t) \qquad \text{et} \qquad u_m(\underline{x}, t) = e^{S(\underline{x},t)} = \exp[\Sigma(\epsilon\underline{x}, \epsilon t)]$$

On suppose $\quad \mathcal{L} \gg L_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \epsilon \ll 1$

Ces définitions permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(\underline{x},t) &= \left[i\Phi_\tau(\underline{\chi},\tau)+\epsilon\,\Sigma_\tau(\underline{\chi},\tau)\right]\; u(\underline{x},t)\;,\\ \frac{\partial u}{\partial x}(\underline{x},t) &= \left[i\Phi_{\chi_1}(\underline{\chi},\tau)+\epsilon\,\Sigma_{\chi_1}(\underline{\chi},\tau)\right]\; u(\underline{x},t)\;,\ldots\end{aligned}$$

en notant $\underline{\chi}=(\chi_1,\chi_2,\chi_3)=\epsilon(x,y,z)=\epsilon\,\underline{x}$, $\tau=\epsilon\,t$, $\Phi_\tau=\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}$, ...
En dérivant une seconde fois :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left[-\Phi_\tau^2+i\,\epsilon(\Phi_{\tau\tau}+2\,\Phi_\tau\,\Sigma_\tau)+O(\epsilon^2)\right]u\;,\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left[-\Phi_{\chi_1}^2+i\,\epsilon(\Phi_{\chi_1\chi_1}+2\,\Phi_{\chi_1}\,\Sigma_{\chi_1})+O(\epsilon^2)\right]u\;\ldots\end{aligned}$$

en notant $\Phi_{\tau\tau}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}$, $\Phi_{\chi_1\chi_1}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\chi_1^2}$, ...
À l'ordre zéro en ϵ, on obtient :

$$-\Phi_\tau^2+C^2(\underline{\chi})\;\left(\Phi_{\chi_1}^2+\Phi_{\chi_2}^2+\Phi_{\chi_3}^2\right)=0$$

Ordre zéro du développement WKB : (optique géométrique)

En exprimant Φ en fonction de de φ, cette relation n'est autre que :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 = c^2(\underline{x}) \; (\underline{\mathrm{grad}}\; \phi)^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \omega^2(\underline{x}, t) = c^2(\underline{x})\; \underline{k}^2(\underline{x}, t)$$

Avec les définitions $\omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\underline{k} = \underline{\mathrm{grad}}\; \varphi$ et la convention $\omega \geq 0$:

$$-\frac{\partial \varphi(\underline{x}, t)}{\partial t} = \Omega[\underline{\mathrm{grad}}\; \varphi(\underline{x}, t), \underline{x}]$$

avec $\Omega(\underline{k}, \underline{x}) = c(\underline{x})\; k$ et $k = \|\underline{k}\|$.

Tracé de rayons en résolvant le système dynamique :

$$\underline{\dot{x}}(t) = c(\underline{x})\; \underline{e}_k(\underline{k}) \qquad \text{et} \qquad \underline{\dot{k}}(t) = -\underline{\mathrm{grad}}\; c(\underline{x})$$

avec les conditions initiales $[\underline{x}(0), \underline{k}(0)] = [\underline{a}, \underline{k}_0(\underline{a})]$.

Ordre un en ϵ : (ordre de l'approximation physique)

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+2\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\frac{\partial S}{\partial t}\right)-c^2(\underline{x})\,(\Delta\varphi+2\,\mathrm{g}\underline{\mathrm{ra}}\mathrm{d}\;\varphi\cdot\mathrm{g}\underline{\mathrm{ra}}\mathrm{d}\;S)=0\;.$$

En utilisant les définitions de $\omega(\underline{x},t)$ et $\underline{k}(\underline{x},t)$, cette équation s'écrit

$$\left(-\frac{\partial\omega}{\partial t}-2\,\omega\,\frac{\partial S}{\partial t}\right)-c^2\;(\mathrm{div}\;\underline{k}+2\,\underline{k}\cdot\mathrm{g}\underline{\mathrm{ra}}\mathrm{d}\;S)=0\;.$$

En utilisant l'équation de l'Eikonale $\omega(\underline{x},t)=c(\underline{x})\,k(\underline{x},t)$ et la relation géométrique $\mathrm{div}\,[k\,\underline{e}_k(\underline{k})]=\underline{e}_k\cdot\mathrm{g}\underline{\mathrm{ra}}\mathrm{d}\;k$, on obtient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\underline{c}_g\cdot\mathrm{g}\underline{\mathrm{ra}}\mathrm{d}\right)\left(S+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,k\right)=0$$

Si $\underline{a}$ est la position du rayon à l'instant initial $t=0$, on a finalement :

$$u_m(\underline{x},t)=u_m(\underline{a},0)\;\sqrt{\frac{k(\underline{a},0)}{k(\underline{x},t)}}$$

3.2 Propagation de l'énergie le long des rayons

Équation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(\underline{x})\,\Delta u = 0$ **:** $\quad \frac{\partial W}{\partial t} + \mathrm{div}\ \underline{I} = 0$

$$W(\underline{x},t) = \frac{1}{2\,c^2(\underline{x})}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\mathrm{g}\underline{\mathrm{ra}}\mathrm{d}\ u\right)^2 \quad \text{et} \quad \underline{I}(\underline{x},t) = -\frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{g}\underline{\mathrm{ra}}\mathrm{d}\ u$$

"densité d'énergie volumique" et le "vecteur flux d'énergie".

- **Cas homogène** $c(\underline{x}) = c_0$ **:** $\quad u(\underline{x},t) = u_m\ e^{i\,\underline{k}\cdot\underline{x} - i\,\omega\,t}$ avec $\omega = c_0\,k$.

Moyenne de b sur une période $T = 2\pi/\omega$ $\quad : \langle b\rangle^T = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T b\ dt$

En définissant $W_{\mathrm{cin}} = \frac{1}{2\,c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$ et $W_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{g}\underline{\mathrm{ra}}\mathrm{d}\ u\right)^2$, on calcule :

$$\langle W_{\mathrm{cin}}\rangle^T = \langle W_{\mathrm{pot}}\rangle^T = \frac{1}{2}k^2\,|u_m|^2\,, \qquad \langle W\rangle^T = \langle W_{\mathrm{cin}}\rangle^T + \langle W_{\mathrm{pot}}\rangle^T\ ,$$

$$\langle W\rangle^T = k^2\,|u_m|^2 \qquad \text{et} \qquad \langle \underline{I}\rangle^T = \underline{c}_g(\underline{k})\,\langle W\rangle^T$$

• **Cas inhomogène** $c(\underline{x})$ **:** paquets d'ondes $u(\underline{x},t) = u_m(\underline{x},t)\; e^{i\,\varphi(\underline{x},t)}$
$\underline{k}(\underline{x},t) = \underline{\text{grad}}\;\varphi(\underline{x},t) \Longrightarrow T(\underline{x},t) = 2\pi/\omega(\underline{x},t) \Longrightarrow \langle b\rangle^T$. On vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle W\rangle^T + \text{div}\,\left(\underline{c}_g\;\langle W\rangle^T\right) = 0$$

où $\langle W\rangle^T(\underline{x},t)$ est la moyenne en $(\underline{x},t)$ sur la période locale $T(\underline{x},t)$.

Deuxième modèle $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \text{div}\,\left[c^2(\underline{x})\,\underline{\text{grad}}\;u\right] = 0$ **:**

Même équation de l'Eikonale $\omega(\underline{x},t) = c(\underline{x})\,k(\underline{x},t)$. On définit :

$$W(\underline{x},t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{c^2(\underline{x})}{2}\,(\underline{\text{grad}}\;u)^2 \;\text{ et }\; \underline{I}(\underline{x},t) = -c^2(\underline{x})\,\frac{\partial u}{\partial t}\,\underline{\text{grad}}\;u\;.$$

On montre que l'on retrouve les deux relations importantes

$$\langle\underline{I}\rangle^T = \underline{c}_g\,\langle W\rangle^T \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\langle W\rangle^T + \text{div}\,\left(\underline{c}_g\;\langle W\rangle^T\right) = 0$$

où la moyenne est effectuée sur la période locale $T(\underline{x},t)$.

D'une manière générale :

Densité volumique d'énergie $W(\underline{x}, t)$ et son flux $\underline{I}(\underline{x}, t)$ vérifiant :

$$\langle \underline{I} \rangle^T = \underline{c}_g \, \langle W \rangle^T \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial t} \langle W \rangle^T + \text{div} \left(\underline{c}_g \; \langle W \rangle^T \right) = 0$$

Exemple : cas des ondes de surfaces $\Omega(\underline{k}, \underline{x}) = \sqrt{g\,k\;\tanh[k\,h(\underline{x})]}$

$$W = \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} \rho_0 \, \underline{U}^2 \, dz + \frac{1}{2} \rho_0 \, g \, \eta^2 \qquad \text{et} \qquad \underline{I} = \int_{-h}^{\eta} \tilde{p} \, \underline{U}_H \, dz$$

où $\underline{U}_H = (u, v)$ est la projection de $\underline{U} = (u, v, w) = \underline{\text{grad}}\, \phi$.

On a $\langle W_{\text{cin}} \rangle^T = \langle W_{\text{pot}} \rangle^T$, $\langle W \rangle^T = \frac{1}{2} \rho_0 \; g \, |\eta_m|^2$ et $\langle \underline{I} \rangle^T = \underline{c}_g \; \langle W \rangle^T$

avec $\underline{c}_\varphi = \frac{\omega}{k} \underline{e}_k$ et $\underline{c}_g = \underline{c}_\varphi \left(\frac{1}{2} + \frac{k\,h}{\sinh(2\,k\,h)} \right)$.

3.3 Conservation de l'action

Pour $\omega = \Omega(\underline{k}, \underline{x}, t)$ dépendant lentement du temps en plus de l'espace :

$$\dot{\underline{x}} = \mathrm{g}\underline{\mathrm{rad}}_k \Omega(\underline{k}, \underline{x}, t) \qquad \text{et} \qquad \dot{\underline{k}} = -\mathrm{g}\underline{\mathrm{rad}}_x \Omega(\underline{k}, \underline{x}, t) \ .$$

La pulsation n'est alors plus constante le long des rayons :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}, t) \cdot \mathrm{g}\underline{\mathrm{rad}}\, \omega = -\frac{\partial \Omega}{\partial t}(\underline{k}, \underline{x}, t) \ .$$

L'équation de conservation de l'énergie doit être remplacée par l'équation de conservation de "l'action" $\langle W \rangle^T / \omega$ qui s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\langle W \rangle^T}{\omega} \right) + \mathrm{div} \left(\underline{c}_g \frac{\langle W \rangle^T}{\omega} \right) = 0 \ .$$

L'action est donc conservée le long des rayons.

Fluide animé d'un courant moyen $\underline{V}(\underline{x}, t)$:

Relation de dispersion intrinsèque (sans courant) : $\omega_i = \Omega_i(\underline{k}, \underline{x}, t)$

Nouvelle relation de dispersion : $\underline{\omega} = \Omega_i(\underline{k}, \underline{x}, t) + \underline{k} \cdot \underline{V}(\underline{x}, t)$.

Nouvelle énergie : $W = W_i + \frac{1}{2}\rho_0\, \underline{V}^2$

Nouvelle vitesse de groupe : $\underline{c}_g = \underline{c}_{gi} + \underline{k} \cdot \underline{V}$.

On montre alors que $W_i/\omega_i = W/\omega$, ce qui entraîne que la nouvelle équation de conservation de l'action :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\langle W\rangle^T}{\omega}\right) + \mathrm{div}\ \left(\underline{c}_g \frac{\langle W\rangle^T}{\omega}\right) = 0$$

est équivalente à l'ancienne :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\langle W_i\rangle^T}{\omega_i}\right) + \mathrm{div}\ \left[(\underline{c}_{gi} + \underline{V})\frac{\langle W_i\rangle^T}{\omega_i}\right] = 0$$

Conclusion

• Le tracé de rayon ne dépend que de $\Omega(\underline{k}, \underline{x}, t)$.

• Les rayons se propagent avec la vitesse de groupe locale $\underline{c}_g = \underline{\text{grad}}_k \Omega$

• Le vecteur d'onde local transporté obéit à la loi $\dot{\underline{k}} = -\underline{\text{grad}}_x \Omega$.

• Le tracé de rayons d'épend d'un "Hamiltonien" qui est $\Omega(\underline{k}, \underline{x}, t)$.

• Approximation WKB :

Ordre de l'optique géométrique : équation de l'Eikonale

Ordre de l'optique physique : l'énergie si Ω ne dépend pas du temps, l'action sinon est transportée le long des rayons

• Applications : "loi de Snel" (ou Snell), "principe de Huyghens", "principe de Fermat", ...

$\boxed{\text{FORMULAIRE}}$

PAQUETS D'ONDES ET MILIEUX

Équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(\underline{x})\ \Delta u = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \text{div}\ \left[c^2(\underline{x})\ \underline{\text{grad}}\ u\right] = 0$$

Cas homogène : $\omega = \Omega(\underline{k}) = c_0\ k$ et $\underline{c}_g(\underline{k}) = \underline{c}_\varphi(\underline{k}) = c_0\ \underline{e}_k$

Ondes de surface

$$\omega = \Omega(\underline{k}) = \sqrt{g\,k\tanh(k\,h_0)} \ \text{ et } \ \underline{c}_g(\underline{k}) = \underline{c}_\varphi(k)\left[\frac{1}{2} + \frac{k\,h_0}{1+\sinh(2\,k\,h_0}\right]$$

Paquets d'ondes dispersés

$$u(\underline{x},t) = u_m(\underline{x},t)\ e^{i\,\varphi(\underline{x},t)}$$

$$\omega(\underline{x},t) = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\underline{x},t) \qquad \text{et} \qquad \underline{k}(\underline{x},t) = \underline{\text{grad}}\ \varphi(\underline{x},t)$$

TRACÉ DE RAYONS

Équation de l'Eikonale

$\omega(\underline{x}, t) = \Omega[\underline{k}(\underline{x}, t), \underline{x}, t] \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(\underline{x}, t) = \Omega[\mathrm{g\underline{rad}}\ \varphi(\underline{x}, t), \underline{x}, t]$

Vitesse de groupe locale : $\underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}, t) = \mathrm{g\underline{rad}}_k \Omega(\underline{k}, \underline{k}, t)$

Tracé de rayons dans le cas général

$$\frac{\partial \underline{k}}{\partial t} + \underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}, t) \cdot \mathrm{g\underline{rad}}\ \underline{k} = -\mathrm{g\underline{rad}}_x \Omega(\underline{k}, \underline{x}, t)$$

$$\underline{\dot{x}} = \underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}) = \mathrm{g\underline{rad}}_k \Omega(\underline{k}, \underline{x}, t) \qquad \text{et} \qquad \underline{\dot{k}} = -\mathrm{g\underline{rad}}_x \Omega(\underline{k}, \underline{x}, t)$$

Système dynamique Hamiltonien : $H(\underline{q}, \underline{p}, t) = \Omega(\underline{k}, \underline{x}, t)$

Cas particuliers

Milieu homogène : $\underline{x}(t) = \underline{a} + \underline{c}_g(\underline{k})\ t$ et $\underline{k}(t) = \underline{\kappa}$

Milieu stationnaire : $\frac{\partial \omega}{\partial t} + \underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}) \cdot \mathrm{g\underline{rad}}\ \omega = 0$

MÉTHODE WKB ET RÉFRACTION

Développement asymptotique

$$u(\underline{x},t) = u_m(\underline{x},t)\; e^{i\,\varphi(\underline{x},t)} = e^{i\,\varphi(\underline{x},t)+S(\underline{x},t)} = e^{\frac{i}{\epsilon}\Phi(\epsilon\,\underline{x},\epsilon\,t)+\Sigma(\epsilon\,\underline{x},\epsilon\,t)}\;,$$

Exemple de l'équation de ondes

$$\omega(\underline{x},t) = c^2(\underline{x})\,k(\underline{x},t) \qquad \text{et} \qquad u_m(\underline{x},t) = u_m(\underline{a},0)\,\sqrt{\frac{k(\underline{a},0)}{k(\underline{x},t)}}$$

Conservation de l'action

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\langle W\rangle^T}{\omega}\right) + \mathrm{div}\,\left(\underline{c}_g\,\frac{\langle W\rangle^T}{\omega}\right) = 0$$