

CORRIGÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

Corrigé 0.1 Loi de Snell

1) Le tracé de rayon est obtenu en résolvant les équations $\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial k_1}$, $\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial k_2}$, $\dot{k}_1 = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}$ et $\dot{k}_2 = 0$ où Ω désigne $\Omega[k_1(t), k_2(t), x(t)]$. **2)** Comme $\dot{k}_2 = 0$, on a $k_{2A} = k_{2B}$, ce qui s'écrit $k_A \sin \theta_A = k_B \sin \theta_B$. **3)** Comme $\Omega(k, x)$ est constant le long d'un rayon, on a $c_A k_A = c_B k_B$. On en déduit $\frac{\sin \theta_A}{c_A} = \frac{\sin \theta_B}{c_B}$ ou encore $n_A \sin \theta_A = n_B \sin \theta_B$.

Corrigé 0.2 KdV à coefficients constants

1) On définit ϵ comme étant le plus petit des petits nombres L/\mathcal{L} et T/\mathcal{T} . **2)** L'ordre dominant en ϵ^0 de l'approximation WKB s'écrit $i \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \alpha i \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \beta i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^3 = 0$, ce qui s'écrit $\omega(x, t) = \Omega[k_1(x, t)]$ avec $\Omega(k_1) = \alpha k_1 - \beta k_1^3$. **3)** Comme $T(x, t)$ varie lentement avec le temps, on peut moyenniser $W(x, t)$ sur une ou quelques unes de ces périodes instantanées. Pendant cet intervalle de temps la fonction $u(x, t)$ se comporte presque comme une onde monochromatique (oscillation harmonique) et l'on a donc $\langle u^2 \rangle^T = \frac{1}{2} u_m^2$. **4)** En choisissant $I = \frac{1}{2} \alpha u^2 + \beta u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$ on peut écrire $\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} = 0$. **5)** En moyennant sur quelques périodes, on a $\left\langle u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\rangle^T = -\frac{1}{2} k_1^2 |u_m|^2$ et $\left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\rangle^T = \frac{1}{2} k_1^2 |u_m|^2$. On en déduit que $\langle I \rangle^T = \frac{\alpha}{4} |u_m|^2 - \frac{3\beta}{4} k_1^2 |u_m|^2$ et donc $\langle W \rangle^T = c_g(k_1) \langle I \rangle^T$. **6)** Le second ordre de WKB, en ϵ^1 , s'écrit $\frac{\partial S}{\partial t} + \alpha \frac{\partial S}{\partial x} - 3\beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial S}{\partial x} - 3\beta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$. En utilisant la définition $k_1(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)$, cette équation s'écrit $\frac{\partial S}{\partial t} + \alpha \frac{\partial S}{\partial x} - 3\beta k_1^2 \frac{\partial S}{\partial x} = 3\beta k_1 \frac{\partial k_1}{\partial x} = \frac{3\beta}{2} \frac{\partial}{\partial x} (k_1^2)$. On a donc $\gamma = \frac{3}{2}\beta$. **7)** En écrivant $S = \frac{1}{2} \text{Ln } u_m^2$, on obtient l'équation $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_m^2) + \frac{1}{2} (\alpha - 3\beta k_1^2) \frac{\partial}{\partial x} (u_m^2) = \frac{3}{2} \beta \frac{\partial}{\partial x} (k_1^2) u_m^2$ qui s'écrit $\frac{\partial}{\partial t} (u_m^2) + \frac{\partial}{\partial x} [c_g(k_1) u_m^2] = 0$ avec $c_g(k_1) = \alpha - 3\beta k_1^2$. On a donc $G(k_1) = c_g(k_1)$. **8)** Comme le milieu est invariant par translation dans le temps (et aussi homogène en espace par ailleurs), on peut écrire $\frac{\partial \omega}{\partial t} + c_g(k_1) \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$. On en déduit l'équation de conservation de l'action qui s'écrit $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle W \rangle^T}{\omega} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(c_g \frac{\langle W \rangle^T}{\omega} \right) = 0$. **9)** Le vecteur d'onde $k_1(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)$ vérifie $k_1(x, 0) = \frac{1}{2}(k_d + k_g) + \frac{1}{2}(k_d - k_g) \tanh(\kappa x)$ avec $k_g = k_*$ et $k_d = k_*/3$ où $k_* = \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}$ vérifie $c_g(k_*) = 0$. On a donc $c_g(k_g) = 0$ et $c_g(k_d) = .9\alpha$. Les rayons sont des droites d'équations $x = a + c_g[k_0(a)]t$. Ces droites s'écartent les unes des autres dans une région située entre les

rayons $x \sim a$ à gauche et les rayons $x \sim a + .9 \alpha t$ à droite (figure ??a). La solution passe d'un comportement en $u_{m0} \cos(k_g x)$ à gauche à un comportement en $u_{m0} \cos(k_d x)$ à droite de la région de transition. Comme l'énergie est conservée entre deux rayons, l'amplitude $u_m(x, t)$ devient de plus en plus faible dans cette région (figure ??b).

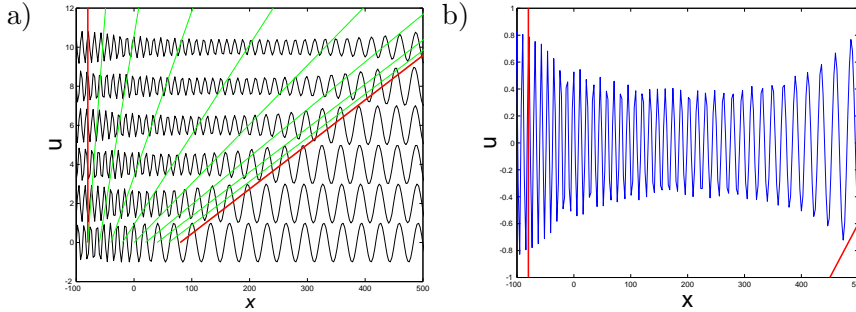


Figure 1: Dispersion d'un train d'onde. a) Evolution. b) Instant final.

Corrigé 0.3 Construction de Huyghens

1) Les isobathes sont des sinusoides d'équations $x = \frac{1}{\alpha} [h_n - \beta \cos(\kappa y)]$ où h_n est le niveau de profondeur (figure 1). **2)** Au large, les rayons sont des droites parallèles à \underline{e}_x . Les lignes de phase sont des droites perpendiculaires. **3)** La relation de dispersion est $\Omega(\underline{k}, \underline{x}) = \sqrt{g k \tanh[k h(\underline{x})]}$, avec $k = \|\underline{k}\|$. Les rayons sont définis par les équations $\frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \underline{c}_g[\underline{k}(t), \underline{x}(t)]$ et $\frac{d}{dt} \underline{k}(t) = F\{k(t), h[\underline{x}(t)]\} \underline{\text{grad}} h[\underline{x}(t)]$ avec $F(k, h) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g k}{\sinh(k h) \cosh^3(k h)}}$. **4)** Les directions de plus grandes pentes sont les vecteurs $\underline{\text{grad}} h(x, y) = \alpha \underline{e}_x - \beta \kappa \sin(\kappa y) \underline{e}_y$. Les long des droites $y = m \pi / \kappa$ avec m entier, ces vecteurs sont égaux à $\alpha \underline{e}_x$. Comme les rayons partent avec une direction initiale $\underline{c}_g(\underline{k}_0)$ parallèle à \underline{e}_x , ces droites sont des rayons. **5)** Au large, c'est-à-dire pour une profondeur très grande, la relation de dispersion peut s'écrire $\Omega(\underline{k}) = \sqrt{g k}$. On a donc $\omega_0 = \sqrt{g k_0}$. **6)** Comme le système en $\underline{x}(t)$ et $\underline{k}(t)$ est hamiltonien, avec un hamiltonien $\Omega(\underline{k}, \underline{x})$ indépendant du temps, la pulsation $\omega(\underline{x}, t)$ est invariante le long des rayons. On en déduit que $\omega(\underline{x}, t) = \omega_0$ est une constante. **7)** Comme $\underline{k}(x, t)$ vérifie $\omega(x, t) = \omega_0 = \Omega[\underline{k}(x, t), \underline{x}]$, on peut affirmer que $\underline{k}(x, t)$ ne dépend pas du temps.

8) On suppose connue la ligne de phase d'équation $\varphi(\underline{x}, t) = \varphi_0$ à l'instant t . À l'instant $t + \delta t$, cette ligne de phase s'est déplacée et est décrite par l'équation $\varphi(\underline{x} + \underline{\delta x}, t + \delta t) = \varphi_0$ où les directions des écarts $\underline{\delta x}$ entre les deux lignes peuvent être choisies arbitrairement. En négligeant les termes d'ordre

δt^2 on obtient $\underline{k}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\delta x} - \omega(\underline{x}, t) \delta t = 0$. Choisissons alors $\underline{\delta x} = \delta x \underline{e}_k$ dans la direction de \underline{k} . On a donc $\delta x = \frac{\omega}{k} \delta t = c_\varphi \delta t$. La construction de Huyghens permet de satisfaire cette condition de distance ainsi que le choix de la direction de $\underline{\delta x}$ parallèle à \underline{k} . En effet, l'enveloppe est tangente au cercle, donc perpendiculaire au rayon, et $\underline{k} = \underline{\text{grad}} \varphi$ est perpendiculaire à la ligne de phase. **9)** On voit que les portions de lignes de phase qui rencontrent les premières les haut-fonds sont ralenties par rapport aux portions situées au-dessus de fonds plus bas. Les rayons sont donc déviés dans la direction des lignes de crêtes de la bathymétrie. **10)** Comme l'énergie $\langle W \rangle^T(\underline{x}) = \frac{1}{8} \rho g H^2(\underline{x})$ est conservée entre deux rayons, la houle est plus forte près des caps que des baies. Ce phénomène s'ajoute au fait que $c_g[k(x)]$ diminue lorsque les rayons arrivent près de la côte, ce qui a pour effet d'augmenter l'énergie par unité de surface (la profondeur diminue). La ligne de déferlement est en moyenne une isobathe avec un recul vers le large au voisinage des caps et une avancée vers la plage au voisinage des baies.

Corrigé 0.4 Réfraction en eaux peu profondes

1) Dans le cadre de l'approximation des eaux peu profondes ($kh \ll 1$), la relation de dispersion s'écrit $\omega = k \sqrt{gh}$. Le module de la vitesse de phase est $c_\varphi(x, y) = c(x) = \sqrt{gh} = \beta x$ avec $\beta = \sqrt{g\alpha}$. **2)** La relation de dispersion s'écrit $\omega = \Omega(k_1, k_2, x) = c(x)k$. On a donc $\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial k_1}(k_1, k_2, x) = c(x) \cos \theta$, $\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial k_2}(k_1, k_2, x) = c(x) \sin \theta$, $\dot{k}_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial x}(k_1, k_2, x) = -c'(x)k = -\beta k$ et $\dot{k}_2 = \frac{\partial \Omega}{\partial y}(k_1, k_2, x) = 0$. En appliquant le changement de variable $dk_1 = \cos \theta dk - k \sin \theta d\theta$ et $dk_2 = \sin \theta dk + k \cos \theta d\theta$, on obtient $\dot{k} = -k\beta \cos \theta$ et $\dot{\theta} = \beta \sin \theta$. **3)** Au voisinage de l'obstacle les rayons sont des droites passant par \underline{x}_0 et les vecteurs d'ondes sont tous de module $k_0 = \omega_0/c_0$ avec $c_0 = \beta x_0$. Les conditions initiales pour le tracé de rayons sont donc $[x(0), y(0), k(0), \theta(0)] = (x_0, 0, k_0, \theta_0)$ avec $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$. **4)** La relation $\dot{\theta} = \beta \sin \theta$ avec $\beta = \sqrt{\alpha g}$ s'intègre en $\text{Ln} \left| \text{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right| = \beta t + \text{cste}$. On en appliquant la condition initiale $\theta(0) = \theta_0$, on en déduit $\text{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \text{tg} \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \exp(\beta t)$. On peut aussi vérifier directement que cette expression est bien solution. La fonction $\theta(t)$ croît de θ_0 à π pour $\theta_0 \in [0, \pi]$ et décroît de θ_0 à $-\pi$ pour $\theta_0 \in [-\pi, 0]$. Les rayons sont donc tous attirés par le rivage, ce qui est conforme avec un tracé intuitif reposant, par exemple, sur la loi de Snel. **5)** On peut écrire $\frac{d\tilde{x}}{d\theta} = \dot{x}/\dot{\theta} = \tilde{x} \cos \theta / \sin \theta$. On en déduit $\text{Ln} |\tilde{x}| = \text{Ln} |\sin \theta| + \text{cste}$ et donc $\tilde{x}(\theta) = \frac{x_0}{\sin \theta_0} \sin \theta$ en appliquant la condition initiale $\tilde{x}(\theta_0) = x_0$ pour $\theta_0 \in [0, \pi]$. On peut trouver directement cette expression en appliquant la loi de Snel $\frac{\sin \theta}{\beta x} = \frac{\sin \theta_0}{\beta x_0}$ qui découle des invariances de k_2 et $c(x)k$ le long des rayons. On peut ensuite écrire $\frac{d\tilde{y}}{d\theta} = \dot{y}/\dot{\theta} = \tilde{y} = \frac{x_0}{\sin \theta_0} \sin \theta$, ce qui conduit à $\tilde{y}(\theta) = \frac{x_0}{\sin \theta_0} (\cos \theta_0 - \cos \theta)$

en appliquant la condition initiale $\tilde{y}(\theta_0) = 0$. Pour $\theta_0 \in [-\pi, 0]$ on obtient les rayons par symétrie par rapport à l'axe Ox . **6)** En éliminant θ dans les expressions de \tilde{x} et \tilde{y} on obtient $\left(\frac{\sin \theta_0}{x_0} x\right)^2 + \left(\frac{\sin \theta_0}{x_0} y - \cos \theta_0\right)^2 = 1$. Les rayons forment donc une famille d'arcs de cercles de centre $\underline{x} = \left(0, \frac{x_0}{\text{tg} \theta_0}\right)$ et de rayons $\frac{x_0}{\sin \theta_0}$. Ces cercles sont tous orthogonaux au rivage $x = 0$. **7)** En $x = 0$ on a $\tilde{x}(\theta) = 0$ et donc $\theta = \pi$ pour $y \geq 0$. On en déduit que $y = x_0 \frac{1 + \cos \Theta_0(y)}{\sin \Theta_0(y)} = x_0 / \text{tg} \left[\frac{\Theta_0(y)}{2}\right]$. On en déduit donc $\text{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Theta_0(y)}{2}\right) = y/x_0$ et donc $\Theta_0 = \pi - 2 \arctg \left(\frac{y}{x_0}\right)$. On obtient l'expression pour $y \leq 0$ par symétrie. **8)** Comme l'énergie est constante entre deux rayons, sa répartition sur le rivage est proportionnelle à $\Theta_0(y)$. **9)** Comme $\omega_0 = c(x) k = \beta x k$, le nombre d'onde k tend vers l'infini quand $x \rightarrow 0$. La longueur d'onde des vagues tend donc vers zéro à l'approche du rivage. En pratique les vagues déferlent avant d'arriver au rivage.

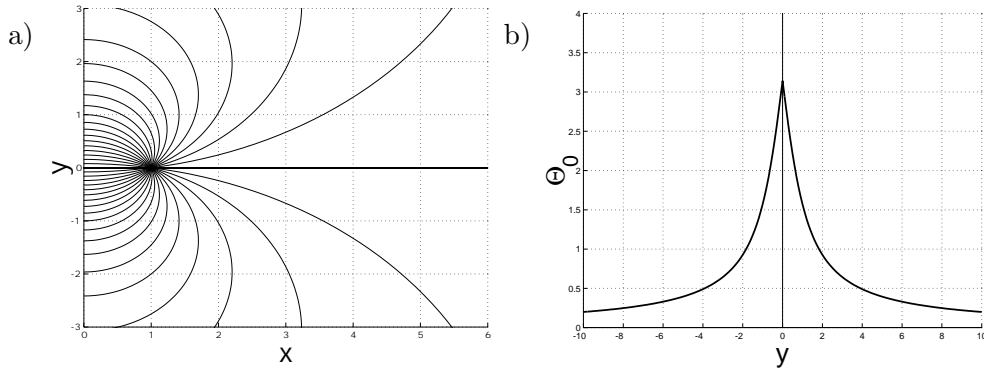


Figure 2: (a) Tracé de rayons. (b) Fonction $\Theta_0(y)$ ou répartition de l'énergie.

Corrigé 0.5 Réfraction de la croix de Saint André

1) Comme $\sqrt{-g \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z}} = N(z) = -\beta z$, on a $\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = -\frac{\beta^2}{g} z^2$. On en déduit $\rho_0(z) = \rho_0(0) \exp\left(-\frac{\beta^2}{3g} z^3\right)$. On peut aussi résoudre $\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = -\frac{\beta^2}{g} z^2$ dans le cadre de l'approximation de Boussinesq pour obtenir $\rho_0(z) = \rho_0(0) \left[1 - \frac{\beta^2}{3g} z^3\right]$ qui est une approximation de la première expression pour z petit. Dans les deux cas, le profil de densité croît avec la profondeur. **2)** Les points irradiés au voisinage de l'obstacle sont sur quatre segments de droite qui forment une croix de Saint André et avec les angles $\pm \alpha_0$ et $\pi \pm \alpha_0$ avec la verticale en notant $\alpha_0 = \arccos \frac{\omega_0}{\beta h_0}$. **3)** Le tracé de rayons est obtenu en résolvant le système dynamique $\dot{x} = \frac{N(z)}{k} \sin^2 \theta = -\beta \frac{z}{k} \sin^2 \theta$, $\dot{z} = -\frac{N(z)}{k} \sin \theta \cos \theta =$

$\beta \frac{z}{k} \sin \theta \cos \theta$, $\dot{k}_1 = 0$ et $\dot{k}_3 = -N'(z) \cos \theta = \beta z \cos \theta$. On a utilisé $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pour simplifier l'expression de la vitesse de groupe intervenant dans l'expression $\frac{d}{dt} \underline{x} = \underline{c}_g$. **4)** Les conditions aux initiales sont $\theta(0) = \frac{\pi}{2} - \alpha_0$ ou $\theta(0) = -\frac{\pi}{2} + \alpha_0$ pour l'angle et $k(0) = k_0$ avec $k_0 \in \mathbb{R}_+$ quelconque. **5)** Comme $N(z) \cos \theta = -\beta z \cos \theta = \omega_0$ et $k_1 = k \cos \theta$ sont invariants le long d'un rayon, on peut écrire que $N_A \cos \theta_A = N_B \cos \theta_B = \omega_0$ et $k_A \cos \theta_A = k_B \cos \theta_B$. **6)** Comme $N(z) \cos \theta = -\beta z \cos \theta = \omega_0$, on a $z = -\frac{\omega_0}{\beta} \frac{1}{\cos \theta}$. Le maximum de z est donc $z = -h_*$ avec $h_* = \frac{\omega_0}{\beta}$. Comme $\omega_0 < \beta h_0$, on a bien $h_* < h_0$. **7)** Les rayons sont tangents à la verticale en $z = -h_*$. On peut supposer qu'il sont réfléchis vers le bas à cette altitude. **8)** Les branches de la croix de Saint-André émises vers le bas sont déviées en se rapprochant de l'horizontale et atteignent asymptotiquement cette direction quand $z \rightarrow -\infty$. Les branches pointant vers le haut se rapproche de la verticale pour l'atteindre à l'altitude $z = -h_*$. Elles se réfléchissent vers le bas pour atteindre asymptotique la direction horizontale quand $z \rightarrow -\infty$ comme pour les branches du bas.

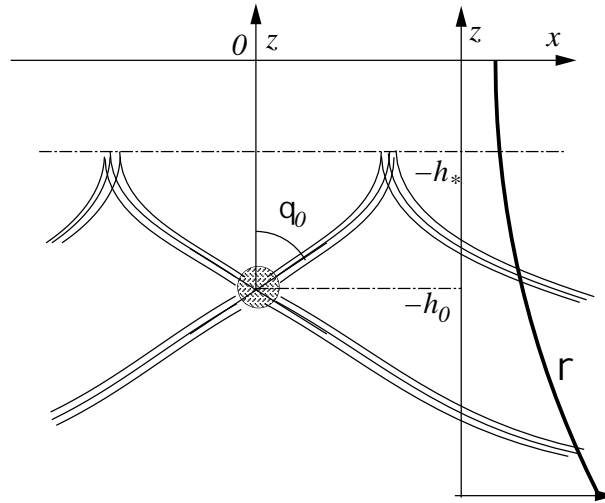


Figure 3: Réfraction de la croix de Saint-André pour une fréquence $N(z)$ linéairement décroissante avec l'altitude.

Corrigé 0.6 Réfraction d'ondes d'inerties

1) Le calcul du gradient en \underline{k} de $\Omega(\underline{k})$ conduit à $\underline{c}_g(\underline{k}) = \frac{f \cos \theta(\underline{k})}{k} \underline{e}_\theta(\underline{k})$. **2)** Le tracé de rayon est défini par le système $\frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x})$ et $\frac{d}{dt} \underline{k}(t) = -\underline{\text{grad}}_x \Omega(\underline{k}, \underline{x})$ avec $\underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}) = \underline{\text{grad}}_k \Omega(\underline{k}, \underline{x}) = \beta y \frac{\cos \theta(\underline{k})}{k} \underline{e}_\theta(\underline{k})$ et $\underline{\text{grad}}_x \Omega(\underline{k}, \underline{x}) = \beta \sin \theta(\underline{k}) \underline{e}^{(2)}$.

3) Ce système s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(\underline{x}) \frac{\cos \theta(\underline{k})}{k} [-\sin \theta(\underline{k})] \frac{k_1}{k_H} & \frac{d}{dt} k_1 &= 0 \\ \frac{dy}{dt} &= f(\underline{x}) \frac{\cos \theta(\underline{k})}{k} [-\sin \theta(\underline{k})] \frac{k_2}{k_H} & \frac{d}{dt} k_2 &= \beta \sin \theta(\underline{k}) \\ \frac{dz}{dt} &= f(\underline{x}) \frac{\cos \theta(\underline{k})}{k} \cos \theta(\underline{k}) & \frac{d}{dt} k_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

4) On en déduit $k_1(t) = k_1(0) = 0$ d'où $\frac{dx}{dt} = 0$ et donc $x(t) = x(0)$. Puis $k_3(t) = k_3(0) = k_3$ et $\frac{dz}{dt} = \beta y \frac{\cos^2 \theta(\underline{k}(t))}{k(t)}$. Il reste donc $\frac{dy}{dt} = -\beta y(t) \frac{k_2(t)k_3}{[k_2^2(t)+k_3^2]^{\frac{3}{2}}}$

et $\frac{dk_2}{dt} = \beta \frac{k_3}{[k_2^2(t)+k_3^2]^{\frac{3}{2}}}$. **5)** En revenant au système initial, on peut écrire

$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial k_2}$ et $\frac{dk_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}$ avec $H(k_2, y) = f \sin \theta = \beta y \frac{k_3}{[k_2^2(t)+k_3^2]^{\frac{3}{2}}}$. Le système

dynamique en (y, k_2) admet l'Hamiltonien $H(k_2, y)$. **6)** Dans le plan (k_2, y) , les

trajectoires de ce système dynamique Hamiltonien sont données par $H(k_2, y) = H_0$. On a $H_0 = \omega$ où ω est la pulsation constante du paquet d'onde dont la

trajectoire suit le rayon considéré. **7)** On en déduit $\omega^2 = \beta^2 y^2 \frac{k_3^2}{k_2^2+k_3^2}$ que l'on

peut écrire sous la forme $\left(\frac{\beta y}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{k_2}{k_3}\right)^2 = 1$. En posant $Y = \frac{\beta y}{\omega}$ et $K = \frac{k_2}{k_3}$,

on obtient $Y^2 - K^2 = 1$. Cette équation décrit deux hyperboles d'asymptotes $Y = \pm K$ telles que $Y = \pm 1$ pour $K = 0$. On en déduit que les rayons forment

une famille d'hyperboles d'asymptotes $\beta y = \pm \omega \frac{k_2}{k_3}$ telles que $\beta y = \pm \omega$ pour

$\frac{k_2}{k_3} = 0$. **8)** On a $\frac{dz}{dt} = \beta y \frac{k_2^2(t)}{[k_2^2(t)+k_3^2]^{\frac{3}{2}}}$. Si $y > 0$, alors $\frac{dz}{dt} > 0$. On en déduit donc

la forme schématique du tracé de rayon dans le plan (y, z) . **9)** On pourrait

considérer que $\Omega_0 = \beta y \underline{e}^{(3)}$ est la rotation verticale du fluide au voisinage de

l'équateur d'une planète en rotation et supposer que les autres composantes

du vecteur rotation sont négligeables. Cette approximation appelée β -plan

est valide pour les ondes d'inertie 2D. Dans le cas des ondes d'inertie 3D,

cette approximation est difficilement justifiable. Une autre application de ce

modèle consisterait à considérer que $\Omega_0(\underline{x})$ représente un champ magnétique

externe appliqué à une fluide incompressible chargé électriquement. Le terme

$\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{U}$ représenterait alors la force de Lorentz.