

# COURS ÉCRIT

1	Paquet d'ondes et milieu . . . . .	2
2	Tracé de rayons . . . . .	7
3	Méthode WKB et réfraction . . . . .	13

## Introduction

On s'intéresse à des milieux non dissipatifs (ou peu dissipatifs) dont les petites oscillations, appelées ondes, se laissent décrire par des équations aux dérivées partielles linéaires. Nous admettrons ici l'expression de ces modèles sans chercher à expliciter leur dérivation à partir de la linéarisation de modèles de la mécanique autour d'un équilibre. Dans le cas où ces milieux sont homogènes en espace ( $\underline{x}$ ) et en temps ( $t$ ), on peut voir tout champ d'ondes comme la superposition d'ondes monochromatiques dont la pulsation et le vecteur d'onde vérifient une relation de dispersion  $\omega = \Omega(\underline{k})$  que l'on peut calculer à partir du modèle linéaire.

Mais les ondes rencontrées dans la nature (réelles ou numériques) se présentent plus souvent sous la forme de paquets d'ondes dispersés pour lesquels il existe une pulsation locale  $\omega(\underline{x}, t)$  et un vecteur d'onde local  $\underline{k}(\underline{x}, t)$ . On peut voir ces paquets d'ondes comme la superposition d'un continuum d'ondes monochromatiques de vecteurs d'onde proches de  $\underline{k}(\underline{x}, t)$  et en phase (interférences constructives) au voisinage de  $(\underline{x}, t)$ . À l'extérieur de ce voisinage, ces ondes sont en interférences destructrices, ce qui explique que d'autres vecteurs d'onde locaux puissent y être observés.

L'évolution de ces paquets d'ondes en terme de pulsation locale, vecteur d'onde local et amplitude locale peut être décrite dans le cadre de l'approximation WKB qui repose sur l'hypothèse que ces paquets d'ondes restent bien dispersés. Ce formalisme permet de prendre en compte les milieux inhomogènes mais lentement variables, pour lesquels on construit facilement une

relation de dispersion locale  $\Omega(\underline{k}, \underline{x})$  à partir du cas homogène. Le premier ordre de l'approximation WKB, appelé "ordre de l'optique géométrique", indique que la relation de dispersion locale est vérifiée par la pulsation locale et le vecteur d'onde local. Cette équation, appelée "équation de l'Eikonale", se résout par un "tracé de rayons" le long desquels se propage l'information sur la phase. Le deuxième ordre de l'approximation, appelé "ordre de l'optique physique", permet de voir que ces rayons transportent l'information sur l'amplitude des ondes.

## 1 Paquet d'ondes et milieux

La réfraction est l'étude de la propagation de paquets d'ondes dispersés dans certains milieux homogènes ou inhomogènes. Avant d'aborder la théorie de la réfraction, il convient de donner des exemples de tels milieux, décrits par des équations aux dérivées partielles linéaires, et de définir la notion de paquets d'ondes dispersés. L'équation des ondes est l'exemple qui est classiquement mis en avant pour présenter le problème de la réfraction. Pour cet exemple, la relation de dispersion des ondes monochromatiques, reliant la pulsation  $\omega$  au vecteur d'onde  $\underline{k}$ , conduit, dans le cas homogène, à un comportement non dispersif. Un exemple de milieu dispersif est donné par le modèle linéaire des ondes de surface. La notion de paquet d'ondes dispersé est obtenue lorsque l'on peut définir une pulsation locale et un vecteur d'onde local dont les échelles de variation spatiale ou temporelle sont grandes devant les périodes ou les longueurs d'ondes qu'ils représentent. La réfraction étudie l'évolution spatiale et temporelle de ces paquets d'ondes dans le cas homogène ou dans le cas où les inhomogénéités varient, elles aussi, lentement.

### 1.1 Milieux décrits par l'équation des ondes

Le comportement linéaire de nombreux milieux perturbés autour d'un état d'équilibre est décrit par "l'équation des ondes" qui s'écrit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(\underline{x}) \Delta u = 0 \quad (1)$$

où  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  est l'opérateur Laplacien et  $u(\underline{x}, t)$  une fonction des variables d'espace  $\underline{x} = (x, y, z)$  et du temps  $t$ . La fonction  $c(\underline{x}) > 0$  a la dimension d'une vitesse. Dans de nombreux problèmes physiques, on rencontre aussi une variante de l'équation des ondes à travers le modèle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div} \left[ c^2(\underline{x}) \operatorname{grad} u \right] = 0 . \quad (2)$$

Bien que ces deux équations ne soient pas équivalentes, nous verrons que la réfraction des ondes s'y effectue de manière identique.

Pour la première équation, l'exemple le plus connu est sans doute celui de la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide ou dans un matériau transparent. Dans ce cas, la fonction scalaire  $u(\underline{x}, t)$  est le potentiel du champ électrique ou l'une des composantes des champs électrique ou magnétique et  $c^2(\underline{x})$  est la vitesse de la lumière au point  $\underline{x}$ . On note  $n(\underline{x}) = c(\underline{x})/c_v$  "l'indice de réfraction" où  $c_v$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

Dans le cas des milieux fluides qui nous intéressent plus particulièrement, on considérera que la première de ces équations 3D décrit la propagation d'ondes sonores dans un fluide compressible. Dans ce cas, le champ  $u(\underline{x}, t)$  représente les fluctuations de pression  $\tilde{p}$  autour d'une valeur d'équilibre ou encore le potentiel des vitesses. La vitesse  $c(\underline{x})$  est alors la vitesse du son. Dans le cas d'un gaz parfait de lois d'état  $p = \rho r \Theta$  et  $e = C_v \Theta$ , cette vitesse est reliée au champ de température  $\Theta(\underline{x})$  par la relation  $c^2 = \gamma r \Theta$  où  $\gamma = (C_v + r)/C_v$ . Dans le cas d'un liquide, la vitesse du son est aussi reliée à sa compressibilité.

La formulation 2D des deux versions de l'équation des ondes s'obtient en considérant des champs  $u(x, y, t)$  indépendants de  $z$ . Le deuxième modèle peut alors s'appliquer aux ondes de surface dans le cas où la profondeur  $h(x, y)$  de la couche fluide est faible devant leur échelle caractéristique horizontale. Dans ce cas, le champ  $u(x, y, t)$  désigne l'élévation de la surface libre par rapport à sa position d'équilibre et la vitesse de propagation  $c(x, y)$  des ondes est donnée par la relation  $c^2 = g h$ .

Les deux équations sont identiques dans le cas homogène où  $c(\underline{x}) = c_0$  est une constante. Ce cas modélise la propagation d'ondes électromagnétiques dans un matériau d'indice constant, d'ondes sonores dans un gaz parfait de température constante ou d'ondes de surface sur une couche fluide mince de profondeur constante. Les équations sont alors invariantes par translations d'espace et de temps. On peut donc considérer des solutions sous la forme d'ondes planes dans le cas 3D ou rectilignes dans le cas 2D, et s'écrivant  $u(\underline{x}, t) = u_m e^{i \underline{k} \cdot \underline{x} - i \omega t}$  où  $u_m \in \mathcal{C}$  est une amplitude complexe. Comme l'équation des ondes est linéaire, la partie réelle de ces solutions complexes est aussi solution. On obtient alors des solutions d'amplitude  $u_m$  non nulle à condition que la relation de dispersion suivante soit vérifiée :

$$\omega^2 = c_0^2 k^2, \quad (3)$$

où  $k = \|\underline{k}\|$  est le module du vecteur d'onde  $\underline{k} = (k_1, k_2, k_3)$ . Comme on ne s'intéresse qu'aux solutions réelles, on peut adopter la convention  $\omega \geq 0$  en remarquant que l'onde  $(u_m, \underline{k}, \omega)$  est la même que l'onde  $(u_m^*, -\underline{k}, -\omega)$ . Avec

cette convention, la relation de dispersion s'écrit alors

$$\omega = \Omega(\underline{k}) = c_0 k . \quad (4)$$

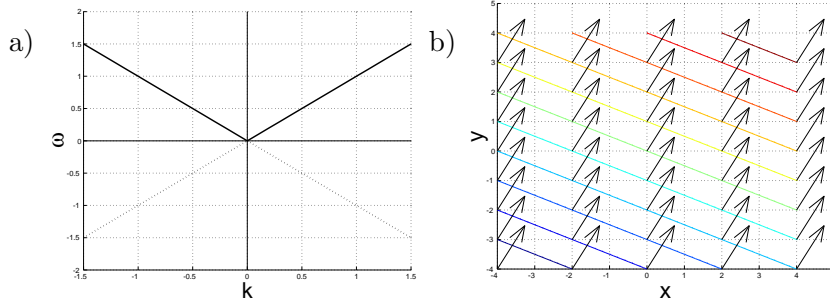


Figure 1: a) Relation de dispersion  $\omega = \Omega(k)$  de l'équation des ondes dans le cas homogène. b) Isophases et vecteurs  $\underline{k}$  ou encore  $\underline{c}_\varphi = \underline{c}_g$ .

En notant  $\varphi(\underline{x}, t) = \underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t$  le champ de phase de ces ondes, on voit que les iso-phases sont des plans dans le cas 3D, ou des lignes dans le cas 2D, perpendiculaires au vecteur d'onde  $\underline{k}$ . La vitesse de phase  $\underline{c}_\varphi = \frac{\omega}{k} \underline{k}/k = c_0 \underline{e}_k$  est perpendiculaire à ces plans ou lignes, le vecteur  $\underline{e}_k = \underline{k}/k$  étant unitaire. On voit que cette vitesse de phase ne dépend pas du nombre d'onde  $k$ . La vitesse de groupe, définie par la relation  $\underline{c}_g(\underline{k}) = \underline{\text{grad}}_k \Omega(\underline{k})$  où  $\underline{\text{grad}}_k = \left( \frac{\partial}{\partial k_1}, \frac{\partial}{\partial k_2}, \frac{\partial}{\partial k_3} \right)$  désigne le gradient par rapport aux composantes de  $\underline{k}$ , vérifie  $\underline{c}_g = \underline{c}_\varphi$ . On dit alors que le milieu est “non-dispersif”.

Les lignes de champ de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe sont des droites perpendiculaires aux plans de phase dans le cas 3D ou aux lignes de phase dans le cas 2D. Ces droites sont appelées les “rayons” de l'onde monochromatique qui se propagent dans le milieu homogène. On souhaite généraliser cette notion de rayons au cas de la propagation des paquets d'ondes dans un milieu homogène ou inhomogène.

## 1.2 Ondes de surface

Les petites oscillations d'une couche fluide à surface libre autour de sa position de repos sont régies par l'équation linéaire

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 && \text{en } z = 0 \\ \Delta \phi &= 0 && \text{pour } -h(x, y) \leq z \leq 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} &= 0 && \text{en } z = -h(x, y) , \end{aligned} \quad (5)$$

où  $g$  est la gravité,  $h(x, y)$  la profondeur et  $\phi(x, y, z, t)$  le potentiel du champ de vitesse  $\underline{U}(x, y, z, t)$  défini par  $\underline{U} = \text{grad } \phi$ . L'élevation de la surface libre  $\eta$  se déduit de  $\phi$  par la relation  $\eta(x, y, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, y, 0, t)$ . Dans ce modèle, on a négligé la tension de surface.

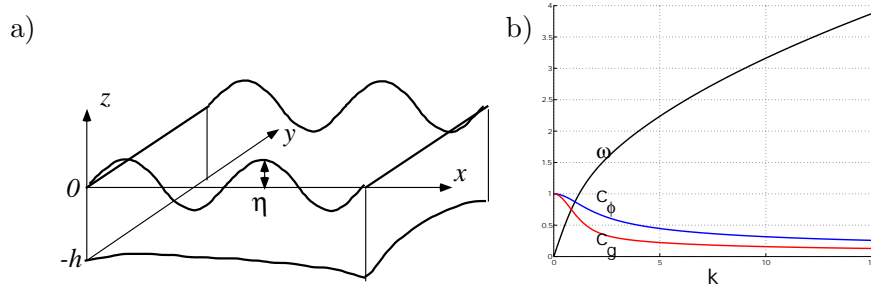


Figure 2: a) Géométrie d'un écoulement à surface libre avec fond variable. b) Relation de dispersion  $\omega = \Omega(k)$  des ondes de surface, modules de la vitesse de phase  $c_\varphi$  et de groupe  $c_g$ .

Dans le cas homogène  $h(x, y) = h_0$  où le fond est plat, les équations sont invariantes par les translations horizontales et de temps. On peut alors considérer des solutions sous la forme  $\phi = \Phi(z) e^{i \underline{k} \cdot \underline{x} - i \omega t}$  où  $\underline{k} = (k_1, k_2)$  est un vecteur d'onde horizontal et  $\underline{x} = (x, y)$  le vecteur des coordonnées horizontales. En reportant dans les équations, le profil  $\Phi(z)$  doit vérifier  $\Phi'' - k^2 \Phi = 0$  avec  $k^2 = k_1^2 + k_2^2$  ainsi que les conditions aux limites  $-\omega^2 \Phi(0) + g \Phi'(0) = 0$  et  $\Phi'(-h_0) = 0$ . Il n'existe de solution non triviale de cette équation linéaire que si la relation de dispersion  $\omega^2 = g k \tanh(k h_0)$  est vérifiée. On a alors  $\Phi(z) = \Phi_m \cosh[k(z + h_0)]$  où  $\Phi_m$  est une amplitude complexe arbitraire. En adoptant la convention  $\omega \geq 0$ , on peut écrire la relation de dispersion des ondes de surfaces sous la forme

$$\omega = \Omega(\underline{k}) = \sqrt{g k \tanh(k h_0)}. \quad (6)$$

La vitesse de phase associée est  $\underline{c}_\varphi(\underline{k}) = c_\varphi(k) \underline{e}_k(\underline{k})$  avec  $c_\varphi(k) = \Omega(k)/k$  et  $\underline{e}_k(\underline{k}) = \underline{k}/k$  vecteur unitaire. La vitesse de groupe  $\underline{c}_g(\underline{k}) = \text{grad}_k \Omega(\underline{k})$  est égale à  $\underline{c}_g(\underline{k}) = c_g(k) \underline{e}_k(\underline{k})$  avec  $c_g = c_\varphi \left[ \frac{1}{2} + \frac{k h_0}{\sinh(2 k h_0)} \right]$ . Dans la limite  $k h_0 \rightarrow 0$ , on retrouve la relation de dispersion des ondes de surface en eaux peu profondes avec  $\Omega(k) \sim c_0 k$  et  $c_\varphi \sim c_g \sim c_0 = \sqrt{g h_0}$ . Dans la limite  $k h_0 \rightarrow \infty$ , on est en présence d'ondes en eaux très profondes et on l'on peut écrire  $\Omega(k) \sim \sqrt{g k}$  et  $c_g \sim \frac{1}{2} c_\varphi \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}$ .

Les lignes de phase d'une onde monochromatique de vecteur d'onde  $\underline{k}$  sont les droites perpendiculaires à  $\underline{k}$ ,  $\underline{c}_\varphi(\underline{k})$  et  $\underline{c}_g(\underline{k})$ . Ce sont, par exemple, les lignes des crêtes ou des creux des vagues. Les "rayons" sont donc des droites

perpendiculaires aux lignes de phase. On souhaite généraliser cette notion de rayons au cas de la propagation des paquets d'ondes aussi bien lorsque le fond est plat que lorsqu'il varie avec l'espace.

### 1.3 Paquets d'ondes dispersés

On s'intéresse à des solutions complexes de modèles linéaires, du type de ceux présentés ci-dessus, qui s'écrivent sous la forme

$$u(\underline{x}, t) = u_m(\underline{x}, t) e^{i\varphi(\underline{x}, t)}. \quad (7)$$

On définit alors la "pulsation locale" et le "vecteur d'onde local" de cette solution par les relations

$$\omega(\underline{x}, t) = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\underline{x}, t) \quad \text{et} \quad \underline{k}(\underline{x}, t) = \underline{\text{grad}} \varphi(\underline{x}, t). \quad (8)$$

On dit que cette solution est un "paquet d'ondes bien dispersé" si sa pulsation locale  $\omega(\underline{x}, t)$ , son vecteur d'onde local  $\underline{k}(\underline{x}, t)$  et son amplitude locale  $u_m(\underline{x}, t)$  ont une échelle de variation spatiale  $\mathcal{L}$  grande devant les longueurs d'ondes  $L(\underline{x}, t) = 2\pi/k(\underline{x}, t)$  avec  $k = \|\underline{k}\|$ . On suppose de même que l'échelle de variation temporelle  $\mathcal{T}$  de ces trois champs est grande devant les périodes locales  $T(\underline{x}, t) = 2\pi/\omega(\underline{x}, t)$ .

Pour simplifier la présentation dans tout ce qui suit, on supposera, sans perte de généralité, que  $u_m(\underline{x}, t)$  est réel. En effet, l'argument d'une amplitude complexe  $u_m$  peut être intégré dans la définition de  $\varphi(\underline{x}, t)$  sans perturber les hypothèses effectuées sur les échelles de variations spatiales et temporelles.

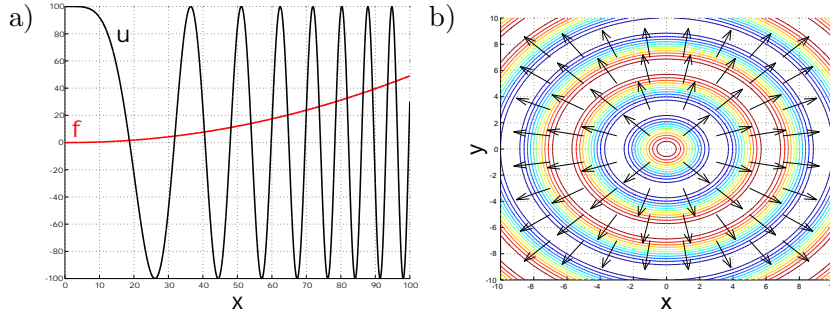


Figure 3: Exemples de paquets d'ondes dispersés de la forme  $u(\underline{x}, t) = u_m(\underline{x}, t) e^{i\varphi(\underline{x}, t)}$  avec  $u_m$  constant. a) Exemple 1D avec  $\varphi(x, t) = \alpha \left( \frac{x^2}{2} - c_0 x t \right)$ . b) Exemple 2D avec  $\varphi(x, y, t) = k_0 (r - c_0 t)$  où  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  : isovaleurs de  $u$  et vecteurs d'onde locaux  $\underline{k}(\underline{x})$ .

Deux exemples de paquets d'ondes sont présentés par la figure 3. L'exemple d'un champ de phase  $\varphi(x, t) = \alpha \left( \frac{x^2}{2} - c_0 x t \right)$ , dans le cas 1D, conduit à  $k_1(x, t) = \alpha (x - c_0 t)$  et  $\omega(x, t) = c_0 \alpha x$ . Ce paquet d'ondes est "bien dispersé" si l'échelle  $\mathcal{L} = 1/\alpha$  de variation de  $k(x, t)$  est grande devant la longueur d'onde  $L(x, t) = 2\pi/k(x, t)$ . On voit que ceci n'est vrai que pour  $x$  suffisamment grand. L'exemple d'un champ de phase  $\varphi(x, y, t) = k_0 (r - c_0 t)$  avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , dans le cas 2D, conduit à  $\underline{k}(\underline{x}, t) = k_0 \underline{e}_r(\underline{x})$  avec  $\underline{e}_r(\underline{x}) = \underline{x}/r$  vecteur unitaire et  $\omega(\underline{x}, t) = c_0 k_0$  avec  $k = \|\underline{k}\|$ . Le paquet d'ondes est "bien dispersé" pour  $r$  suffisamment grand. Ce n'est pas le cas dans la limite  $r \rightarrow 0$  où toutes les directions de vecteurs d'onde coexistent.

Notons ici certains résultats généraux qui découlent des définitions  $\underline{k}(\underline{x}, t) = \underline{\text{grad}} \varphi$  et  $\omega(\underline{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \varphi$  comme par exemple :

$$\underline{\text{rot}} \underline{k} = \underline{0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{k}}{\partial t} + \underline{\text{grad}} \omega = 0 . \quad (9)$$

Ces relations rappellent que  $\underline{k}(\underline{x}, t)$  et  $\omega(\underline{x}, t)$  ne sont pas des champs quelconques mais découlent du champ de phase  $\varphi(\underline{x}, t)$ .

Dans tout ce qui suit, on supposera la solution connue à un instant initial ou pour tout temps sur une surface dans l'espace 3D (sur une ligne dans le cas 2D) et sous la forme d'un paquet ondes initial ou incident. En supposant que le paquet d'ondes reste dispersé en se propageant dans le milieu, on cherche alors la forme des plans ou lignes de phase ainsi que la propagation de l'amplitude du paquet d'ondes. Dans certains cas, ce problème se résout par un tracé de rayons. On parle de "réfraction des ondes" dans le milieu. Nous négligerons les phénomènes supplémentaires de "diffraction" et de "réflexion" qui interviennent en présence de frontières ou lorsque le paquet d'ondes n'est pas suffisamment dispersé.

## 2 Tracé de rayons

La réfraction des paquets d'ondes dispersés dans un milieu homogène ou lentement inhomogène repose sur un principe très simple : on suppose que la pulsation locale  $\omega(\underline{x}, t)$  et le vecteur d'onde local  $\underline{k}(\underline{x}, t)$  vérifient une relation de dispersion locale, caractérisée par une fonction  $\Omega(\underline{k}, \underline{x})$  qui s'obtient simplement en faisant varier avec  $\underline{x}$  la relation de dispersion obtenue dans le cas homogène. La justification de ce résultat sera présentée plus loin à l'aide de la méthode WKB. La relation entre la pulsation locale et le vecteur d'onde local, qui font intervenir des dérivées du champ de phase  $\varphi(\underline{x}, t)$ , est appelée "équation de l'Eikonale" et se présente sous la forme d'une équation aux dérivées partielles. On peut la résoudre par un "tracé de rayons" après

avoir ramené la résolution de cette équation aux dérivées partielles à celle d'un système dynamique de  $\mathbb{R}^6$  régissant l'évolution de vecteurs d'onde  $\underline{k}(t)$  transportés le long de rayons  $\underline{x}(t)$  qui sont des lignes de champs de la vitesse de groupe  $\underline{c}_g$ . Dans le cas homogène, les vecteurs d'onde restent constants le long des rayons qui sont des droites. Dans le cas inhomogène, seule la pulsation reste constante le long des rayons, qui peuvent être courbes.

## 2.1 Équation de l'Eikonale

On s'intéresse à des paquets d'ondes bien dispersés de la forme  $u(\underline{x}, t) = u_m(\underline{x}, t) e^{i\varphi(\underline{x}, t)}$ . Localement, c'est-à-dire au voisinage de  $(\underline{x}, t)$  dans l'espace-temps, ces paquets d'ondes peuvent être vus comme des ondes monochromatiques de pulsation  $\omega(\underline{x}, t) = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\underline{x}, t)$ , de vecteur d'ondes  $\underline{k}(\underline{x}, t) = \underline{\text{grad}} \varphi(\underline{x}, t)$  et d'amplitude  $u_m(\underline{x}, t)$  constants. En effet, on a supposé que les échelles de variations spatiale  $\mathcal{L}$  et temporelle  $\mathcal{T}$  étaient grandes devant la longueur d'onde locale  $L(\underline{x}, t) = 2\pi/k(\underline{x}, t)$  et la période locale  $T(\underline{x}, t) = 2\pi/\omega(\underline{x}, t)$ . On considère tout d'abord le cas d'un milieu homogène. Comme un paquet d'ondes dispersé ressemble localement à une onde monochromatique, on s'attend à ce que la relation de dispersion  $\omega = \Omega(\underline{k})$  soit valable *localement*, ce qui s'écrit :

$$\omega(\underline{x}, t) = \Omega[\underline{k}(\underline{x}, t)] . \quad (10)$$

La justification de ce résultat s'effectue en ayant recours à la méthode asymptotique WKB présentée plus loin et tirant parti des petits paramètres  $T/\mathcal{T}$  et  $L/\mathcal{L}$ . Nous nous contenterons d'admettre intuitivement ce résultat pour l'instant.

On peut même se risquer à généraliser cette relation aux cas des milieux inhomogènes dont les propriétés dispersives varient sur des échelles grandes devant les longueurs d'ondes et les périodes. On suppose ainsi que  $c(\underline{x})$  pour l'équation des ondes ou  $h(x, y)$  pour le modèle des ondes de surface, ont une échelle de variation spatiale lente. On pourrait aussi faire varier lentement ces quantités avec le temps, mais nous n'envisageons pas cette éventualité pour le moment, par souci de simplicité. On peut alors conjecturer que les paquets d'ondes dispersés, caractérisés par leur phase  $\varphi(\underline{x}, t)$ , doivent vérifier la relation de dispersion inhomogène

$$\omega(\underline{x}, t) = \Omega[\underline{k}(\underline{x}, t), \underline{x}] \quad (11)$$

où  $\Omega(\underline{k}, \underline{x})$  est une fonction des variables  $\underline{k}$  et de  $\underline{x}$ . Dans le cas des équations des ondes, on écrira donc  $\Omega(\underline{k}, \underline{x}) = c(\underline{x}) k$  avec  $k = \|\underline{k}\|$ . Dans le cas des ondes de surface, on écrira  $\Omega(\underline{k}, \underline{x}) = \sqrt{g k \tanh[k h(\underline{x})]}$  avec  $\underline{k} = (k_1, k_2)$  et  $\underline{x} = (x, y)$ .



Pour résumer cette conjecture, on peut dire qu'un paquet d'ondes dispersé de phase  $\varphi(\underline{x}, t)$  qui se propage dans un milieu inhomogène de relation de dispersion  $\Omega(\underline{k}, \underline{x})$  lentement variable en  $\underline{x}$ , vérifie la relation

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\underline{x}, t) = \Omega[\underline{\text{grad}} \varphi(\underline{x}, t), \underline{x}]. \quad (12)$$

Cette équation est appelée "équation de l'Eikonale". Sa résolution permet de tracer les plans ou les lignes isophases. Comme nous le verrons ci-dessous, elle correspond au premier ordre de l'approximation WKB, appelé aussi "ordre de l'optique géométrique". Nous allons voir que cette équation de l'Eikonale se résout à l'aide de "tracé de rayons" qui propagent l'information sur la phase des ondes.

Par simplicité, on considère ci-dessous le cas où l'on connaît l'expression du paquet d'ondes à un instant initial afin de déterminer son évolution aux instants ultérieurs. Une fois la méthode de tracé de rayons présentée, il sera facile de la généraliser au cas où la solution est connue pour tous temps sur une surface dans le cas 3D ou sur une ligne dans le cas 2D.

## 2.2 Tracé de rayons en milieu homogène

Étant donné un modèle linéaire de relation de dispersion  $\omega = \Omega(\underline{k})$ , décrivant donc un milieu *homogène*, on s'intéresse à la phase  $\varphi(\underline{x}, t)$  d'un paquet d'ondes dispersé  $u_m(\underline{x}, t) e^{i\varphi(\underline{x}, t)}$  solution de l'équation de l'Eikonale

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega(\underline{\text{grad}} \varphi). \quad (13)$$

Les définitions  $\omega(\underline{x}, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  de la pulsation locale du paquet d'ondes et  $\underline{k}(\underline{x}, t) = \underline{\text{grad}} \varphi$  du vecteur d'onde local permettent d'écrire l'équation sous la forme

$$\omega(\underline{x}, t) = \Omega[\underline{k}(\underline{x}, t)]. \quad (14)$$

On en déduit que le champ  $\underline{k}(\underline{x}, t)$  vérifie l'équation d'advection

$$\frac{\partial \underline{k}}{\partial t} + \underline{c}_g(\underline{k}) \cdot \underline{\text{grad}} \underline{k} = \underline{0} \quad (15)$$

où  $\underline{c}_g(\underline{k}) = \underline{\text{grad}}_k \Omega(\underline{k})$  est la vitesse de groupe. En effet, la définition  $\underline{k} = \underline{\text{grad}} \varphi$  du vecteur d'onde local et l'équation de l'Eikonale entraînent que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \underline{k}(\underline{x}, t) &= \underline{\text{grad}} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\underline{x}, t) \right] = -\underline{\text{grad}} \{ \Omega[\underline{k}(\underline{x}, t)] \} \\ &= -{}^t[\underline{\text{grad}} \underline{k}(\underline{x}, t)] \underline{c}_g[\underline{k}(\underline{x}, t)] = -[\underline{\text{grad}} \underline{k}(\underline{x}, t)] \underline{c}_g[\underline{k}(\underline{x}, t)] \end{aligned}$$

$$= -\underline{c}_g[k(\underline{x}, t)] \cdot \underline{\text{grad}} \underline{k}(\underline{x}, t)$$

où  $\underline{\text{grad}} \underline{k}$  est la jacobienne du champ de vecteur  $\underline{k}$ . On a utilisé la symétrie  ${}^t \underline{\text{grad}} \underline{k} = \underline{\text{grad}} \underline{k}$  du gradient de  $\underline{k}$  qui découle de la définition  $\underline{k} = \underline{\text{grad}} \varphi$ .

On souhaite maintenant résoudre cette équation à partir d'une condition initiale  $\underline{k}(\underline{x}, 0) = \underline{k}_0(\underline{x})$  qui découle de la phase initiale  $\varphi(\underline{x}, 0)$  par la relation  $\underline{k}_0(\underline{x}) = \underline{\text{grad}} \varphi(\underline{x}, 0)$ . Une fois le champ  $\underline{k}(\underline{x}, t)$  connu, il sera possible de remonter au champ de phase  $\varphi(\underline{x}, t) = \underline{\text{grad}} \underline{k}(\underline{x}, t)$  à l'aide d'une intégration, et donc de tracer les plans ou les lignes de phase.

La méthode de tracé de rayons permet de résoudre cette équation aux dérivées partielles (EDP) avec conditions initiales. On peut voir cette méthode comme une généralisation au cas 3D instationnaire  $(\underline{x}, t)$  de la méthode des caractéristiques, mais il n'est pas nécessaire de connaître cette notion pour le cas basique rencontré ici. On peut aussi considérer cette EDP comme une équation d'advection pour  $\underline{k}$  sous l'action du champ de vitesse  $\underline{c}_g$  et considérer les représentations eulériennes et lagrangiennes induites par ce champ de vitesse. La présentation suivante se base sur ce principe.

On commence par définir une famille de "trajectoires"  $[\underline{x}(t), \underline{k}(t)]$  de  $\mathbb{R}^6$  solutions du système dynamique suivant :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{c}_g(\underline{k}) \quad \text{et} \quad \dot{\underline{k}} = \underline{0} \quad (16)$$

avec  $\dot{\underline{x}}(t) = \frac{d\underline{x}}{dt}(t)$  et  $\dot{\underline{k}}(t) = \frac{d\underline{k}}{dt}(t)$ . Ces trajectoires sont paramétrées par les conditions initiales  $\underline{x}(0) = \underline{a}$  et  $\underline{k}(0) = \underline{\kappa}$ . Ce sont donc des droites dans l'espace  $(\underline{x}, \underline{k}) \in \mathbb{R}^6$  d'équation

$$\underline{x}(t) = \underline{a} + \underline{c}_g(\underline{\kappa}) t \quad \text{et} \quad \underline{k}(t) = \underline{\kappa}. \quad (17)$$

On peut maintenant considérer la famille des trajectoires  $\underline{x}(t)$  de  $\mathbb{R}^3$  obtenues à partir des conditions initiales  $[\underline{a}, \underline{k}_0(\underline{a})]$  de  $\mathbb{R}^6$  pour l'ensemble des  $\underline{a}$  de  $\mathbb{R}^3$  à considérer. On décide d'appeler "rayons" associés à la condition initiale  $\underline{k}_0(\underline{a})$  les droites  $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t) = \underline{a} + \underline{c}_g[\underline{k}_0(\underline{a})] t$  de  $\mathbb{R}^3$ . Tant que ces rayons ne se coupent pas, il est possible de remonter à la position  $\underline{a} = \underline{A}(\underline{x}, t)$  solution de l'équation implicite

$$\underline{x} = \underline{a} + \underline{c}_g[\underline{k}_0(\underline{a})] t \quad (18)$$

qui est la position initiale du rayon parvenu au point  $\underline{x}$  à l'instant  $t$ .

Cette fonction  $\underline{A}(\underline{x}, t)$  permet alors de construire le champ  $\underline{k}(\underline{x}, t)$  à l'aide de la relation

$$\underline{k}(\underline{x}, t) = \underline{k}_0[\underline{A}(\underline{x}, t)]. \quad (19)$$

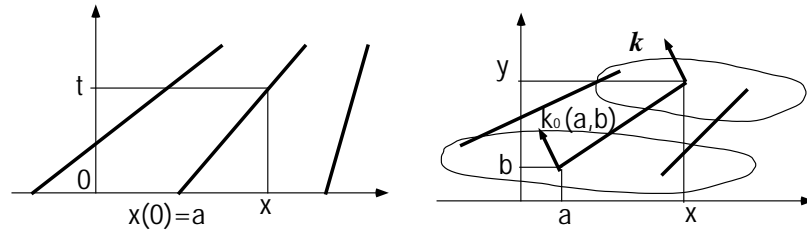


Figure 4: tracé de rayons dans le cas homogène

En dérivant par rapport au temps la relation  $k_0(\underline{a}) = \underline{k}[X(\underline{a}, t), t]$ , on voit que l'on peut écrire

$$\frac{\partial \underline{k}}{\partial t} + \underline{c}_g(\underline{k}) \cdot \underline{\text{grad}} \underline{k} = 0 \quad (20)$$

pour tous les points  $(\underline{x}, t)$  atteints par les rayons.

En résolvant le simple système dynamique à six degrés de libertés  $\dot{\underline{x}} = \underline{c}_g(\underline{k})$  et  $\dot{\underline{k}} = \underline{0}$ , on a bien construit une solution  $\underline{k}(\underline{x}, t)$  de l'équation d'advection  $\frac{\partial}{\partial t} \underline{k} + \underline{c}_g(\underline{k}) \cdot \underline{\text{grad}} \underline{k} = \underline{0}$ . Ce système dynamique définit des "rayons"  $\underline{x}(t)$  dans  $\mathbb{R}^3$  qui "transportent" les vecteurs d'onde  $\underline{k}$  issus des conditions initiales  $\underline{k}(0) = \underline{k}_0[\underline{x}(0)]$ . Pour tout couple  $(\underline{x}, t)$ , le vecteur d'onde  $\underline{k}(\underline{x}, t)$  est obtenu en regardant le vecteur d'onde transporté par le rayon qui passe par  $\underline{x}$  à l'instant  $t$ .

Une conséquence de l'invariance du vecteur d'onde  $\underline{k}$  le long d'un rayon est l'invariance de la pulsation  $\omega = \Omega(\underline{k})$ . Nous verrons que ce dernier résultat subsiste même lorsque le milieu n'est plus homogène et que le vecteur d'onde n'est plus invariant.

Rappelons que cette détermination des solutions par la méthode de tracé de rayons  $(x, t)$  n'est valide que dans les régions de l'espace-temps où les rayons ne se croisent pas. Lorsque ces derniers se croisent, on appelle "caustiques" l'enveloppe des rayons. Au voisinage de ces caustiques, l'approche WKB (voir ci-dessous) n'est plus valide dans la mesure où le second ordre (ordre de l'optique physique) prédit une amplitude des ondes qui devient infinie. On doit alors faire intervenir les phénomènes de diffraction qui se traduisent par une diffusion de l'énergie à travers les tubes de rayons. Le phénomène de diffraction n'est pas abordé dans le cadre de ce cours. On remarque qu'au voisinage des caustiques les ondes ne sont plus dispersées, comme nous l'avions supposé au départ, dans la mesure où plusieurs vecteurs d'onde sont définis en même point.

### 2.3 Tracé de rayon en milieu inhomogène

Dans le cas d'un milieu *inhomogène*, l'équation de l'Eikonale s'écrit

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\underline{x}, t) = \Omega[\underline{\text{grad}} \varphi(\underline{x}, t), \underline{x}] \quad \Longleftrightarrow \quad \omega(\underline{x}, t) = \Omega[\underline{k}(\underline{x}, t), \underline{x}] \quad (21)$$

où la fonction  $\Omega(\underline{k}, \underline{x})$  décrit le comportement dispersif inhomogène du milieu. En dérivant par rapport au temps, on obtient l'équation

$$\frac{\partial \underline{k}}{\partial t} + \underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}) \cdot \underline{\text{grad}} \underline{k} = -\underline{\text{grad}}_x \Omega(\underline{k}, \underline{x}) \quad (22)$$

où  $\underline{\text{grad}}_x$  désigne le gradient par rapport aux variables  $\underline{x}$ . La vitesse de groupe locale en  $\underline{x}$  d'un paquet d'ondes de vecteur d'onde  $\underline{k}$  est  $\underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}) = \underline{\text{grad}}_k \Omega(\underline{k}, \underline{x})$ , la notation  $\underline{\text{grad}}_k$  désignant le gradient par rapport aux variables  $\underline{k}$ .

Cette équation se résout en considérant le système dynamique dans  $\mathbb{R}^6$  suivant en  $[\underline{x}(t), \underline{k}(t)]$  :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}) = \underline{\text{grad}}_k \Omega(\underline{k}, \underline{x}) \quad \text{et} \quad \dot{\underline{k}} = -\underline{\text{grad}}_x \Omega(\underline{k}, \underline{x}) \quad (23)$$

avec  $\dot{\underline{x}}(t) = \frac{d\underline{x}}{dt}(t)$  et  $\dot{\underline{k}}(t) = \frac{d\underline{k}}{dt}(t)$ . On généralise en effet facilement au cas inhomogène la démonstration présentée pour le cas homogène. Étant donné une condition initiale  $\underline{k}(\underline{x}, 0) = \underline{k}_0(\underline{x})$ , on considère l'ensemble des conditions initiales  $[\underline{x}(0), \underline{k}(0)] = [\underline{a}, \underline{k}_0(\underline{a})]$  où  $\underline{a}$  décrit tout  $\mathbb{R}^3$  ou un de ses sous-ensembles. Les trajectoires de  $\mathbb{R}^6$  issues de ces conditions initiales s'écrivent alors  $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$  et  $\underline{k}(t) = \underline{K}(\underline{a}, t)$  pour chaque valeur de  $\underline{a}$ . Les courbes  $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$  sont les "rayons" associés à la condition initiale  $\underline{k}_0(\underline{x})$ . Contrairement au cas homogène, ces rayons ne sont pas forcément des droites. Tant que ces rayons ne se coupent pas, il est possible de remonter à la position  $\underline{a} = \underline{A}(\underline{x}, t)$  solution de

$$\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t) \quad (24)$$

qui est la position initiale du rayon parvenu au point  $\underline{x}$  à l'instant  $t$ .

Comme dans le cas homogène, il suffit alors de construire le champ  $\underline{k}(\underline{x}, t)$  à l'aide de la relation  $\underline{k}(\underline{x}, t) = \underline{k}_0[\underline{A}(\underline{x}, t), t]$  qui vérifient alors l'équation d'advection considérée avec sa condition initiale. Au voisinage d'éventuelles caustiques, qui sont les enveloppes des rayons quand ils se coupent, la méthode cesse d'être valable et les paquets d'ondes cessent d'être dispersés.

On remarque finalement que le système dynamique de  $\mathbb{R}^6$  considéré répond à la définition d'un système dynamique hamiltonien

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\underline{p}, \underline{q}) \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(\underline{p}, \underline{q}) \quad (25)$$

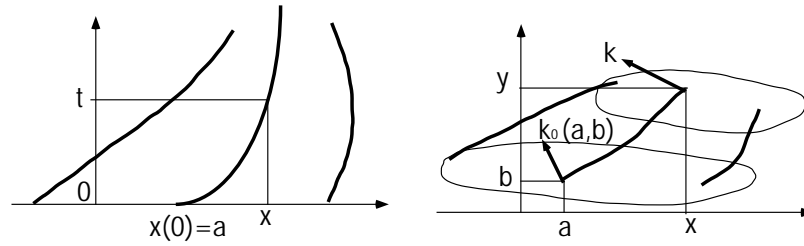


Figure 5: tracé de rayons dans le cas inhomogène

en notant  $\underline{q} = \underline{x}$ ,  $\underline{p} = \underline{k}$  et  $H = \Omega$ . Le Hamiltonien  $\Omega(\underline{k}, \underline{x})$  est une fonction de six variables.

Par conséquent, le champ  $\omega(\underline{x}, t) = \Omega[\underline{k}(\underline{x}, t), \underline{x}]$  est constant le long des rayons (propriété des systèmes dynamiques hamiltoniens autonomes que l'on peut vérifier très facilement). On peut le vérifier directement en remarquant que la dérivation par rapport au temps de cette dernière relation, combinée à la relation  $\frac{\partial}{\partial t} \underline{k} + \text{grad } \omega = 0$  permet d'écrire :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}) \cdot \text{grad } \omega = 0 . \quad (26)$$

### 3 Méthode WKB et réfraction

La méthode asymptotique WKB (Wentzel, Kramer, Brillouin) ou WKBJ (et Jeffreys) est un développement asymptotique reposant sur l'existence d'une séparation entre une échelle rapide, traduisant ici une oscillation spatio-temporelle, et d'une échelle lente, traduisant ici une modulation de fréquence, de longueur d'onde ou d'amplitude ou encore l'inhomogénéité du milieu. Une introduction utile à cette méthode peut être trouvée dans l'ouvrage "Advanced mathematical method for scientists and engineers", M. Bender et S. A. Orszag, Mac Graw-Hill 1978. Nous présentons ici son principe sur l'exemple de l'équation des ondes. L'ordre dominant du développement, appelé "ordre de l'optique géométrique", conduit à l'équation de l'Eikonale que nous avons simplement conjecturé jusqu'ici. Le second ordre, appelé "ordre de l'optique physique", permet d'aller plus loin que le simple tracé de rayons en montrant que ces derniers propagent aussi l'énergie (ou l'action dans le cas instationnaire). On admettra que l'application de la méthode WKB aux autres modèles linéaires de la mécanique des fluides conduit toujours à une équation de l'Eikonale basée sur la relation de dispersion inhomogène  $\Omega(\underline{k}, \underline{x})$  construite simplement à partir de la relation de dispersion homogène. En ce qui concerne le second ordre de l'approximation, la généralisation aux modèles de la mécanique des

fluides, pour lesquels on peut définir naturellement une densité volumique d'énergie  $W(\underline{x}, t)$  et le flux associé  $\underline{I}(\underline{x}, t)$ , se fait en considérant la moyenne de ces quantités sur une période locale  $T(\underline{x}, t) = 2\pi/\omega(\underline{x}, t)$ . À partir de l'exemple de l'équation des ondes, on admettra la généralité de la loi de conservation de cette énergie moyenne dans le cas stationnaire, ou de l'action dans le cas instationnaire. La justification de ce résultat est à rechercher dans les ouvrages cités en référence.

### 3.1 Approximation WKB pour l'équation des ondes

On considère l'exemple de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(\underline{x}) \Delta u = 0 \quad (27)$$

dans le cas où l'échelle  $\mathcal{L}$  de variation spatiale de  $c(\underline{x})$  est grande devant la période d'échelle caractéristique  $L_0$  des paquets d'ondes que l'on cherche à décrire. On définit alors  $\epsilon = L_0/\mathcal{L}$  et on écrit  $c(\underline{x}) = C(\epsilon \underline{x})$ . La fonction  $C(\underline{\chi})$  varie sur une échelle d'ordre  $L_0$  alors que  $c(\underline{x})$  varie sur une échelle d'ordre  $\mathcal{L} = \frac{L_0}{\epsilon}$ . L'approximation WKB consiste à supposer que  $\epsilon \ll 1$  et à représenter les trains d'ondes dispersés sous la forme

$$u(\underline{x}, t) = u_m(\underline{x}, t) e^{i\varphi(\underline{x}, t)} = u_n e^{i\varphi(\underline{x}, t) + S(\underline{x}, t)} = u_n e^{\frac{i}{\epsilon} \Phi(\epsilon \underline{x}, \epsilon t) + \Sigma(\epsilon \underline{x}, \epsilon t)}, \quad (28)$$

où  $u_n$  est une constante dimensionnelle (même unité que  $u$ ) et où l'on choisit  $u_m$  réel. Les champs réels  $\Phi(\underline{\chi}, \tau)$  et  $\Sigma(\underline{\chi}, \tau)$  vérifient  $\varphi(\underline{x}, t) = \frac{1}{\epsilon} \Phi(\epsilon \underline{x}, \epsilon t)$  et  $u_m(\underline{x}, t)/u_n = e^{S(\underline{x}, t)} = \exp[\Sigma(\epsilon \underline{x}, \epsilon t)]$ .

Ces définitions permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(\underline{x}, t) &= \left[ i\Phi_\tau(\underline{\chi}, \tau) + \epsilon \Sigma_\tau(\underline{\chi}, \tau) \right] u(\underline{x}, t), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(\underline{x}, t) &= \left[ i\Phi_{\chi_1}(\underline{\chi}, \tau) + \epsilon \Sigma_{\chi_1}(\underline{\chi}, \tau) \right] u(\underline{x}, t), \dots \end{aligned}$$

en notant  $\underline{\chi} = (\chi_1, \chi_2, \chi_3) = \epsilon(x, y, z) = \epsilon \underline{x}$ ,  $\tau = \epsilon t$ ,  $\Phi_\tau = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}$ ,  $\Phi_{\chi_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial \chi_1}$ , etc. On en déduit alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left[ -\Phi_\tau^2 + i\epsilon(\Phi_{\tau\tau} + 2\Phi_\tau \Sigma_\tau) + O(\epsilon^2) \right] u, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left[ -\Phi_{\chi_1}^2 + i\epsilon(\Phi_{\chi_1\chi_1} + 2\Phi_{\chi_1} \Sigma_{\chi_1}) + O(\epsilon^2) \right] u, \dots \end{aligned} \quad (29)$$

avec  $\Phi_{\tau\tau} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}$ ,  $\Phi_{\chi_1\chi_1} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi_1^2}$ , etc. En reportant l'expression asymptotique de  $u$  dans l'équation des ondes on obtient

$$-\Phi_\tau^2 + C^2(\underline{\chi}) \left( \Phi_{\chi_1}^2 + \Phi_{\chi_2}^2 + \Phi_{\chi_3}^2 \right) = 0 \quad (30)$$

à l'ordre zéro en  $\epsilon$ . En exprimant  $\Phi$  en fonction de  $\varphi$ , cette relation n'est autre que l'équation de l'Eikonale

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 = c^2(\underline{x}) (\underline{\text{grad}} \varphi)^2 \iff \omega^2(\underline{x}, t) = c^2(\underline{x}) \underline{k}^2(\underline{x}, t) \quad (31)$$

en rappelant les définitions  $\omega(\underline{x}, t) = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\underline{x}, t)$  et  $\underline{k}(\underline{x}, t) = \underline{\text{grad}} \varphi(\underline{x}, t)$ . En adoptant la convention  $\omega \geq 0$ , cette équation s'écrit

$$-\frac{\partial\varphi(\underline{x}, t)}{\partial t} = \Omega[\underline{\text{grad}} \varphi(\underline{x}, t), \underline{x}] \iff \omega(\underline{x}, t) = c(\underline{x}) k(\underline{x}, t) \quad (32)$$

avec  $\Omega(\underline{k}, \underline{x}) = c(\underline{x}) k$  et  $k = \|\underline{k}\|$ . Comme on l'a vu, cette équation de l'Eikonale peut se résoudre par un tracé de rayons dont le système dynamique associé en  $[\underline{x}(t), \underline{k}(t)]$  s'écrit ici :

$$\dot{\underline{x}}(t) = c(\underline{x}) \underline{e}_k(\underline{k}) \quad \text{et} \quad \dot{\underline{k}}(t) = -\underline{\text{grad}} c(\underline{x}). \quad (33)$$

puisque  $\underline{\text{grad}}_k \Omega(\underline{k}, \underline{x}) = \underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}) = c(\underline{x}) \underline{e}_k(\underline{k})$  et  $\underline{\text{grad}}_x \Omega(\underline{k}, \underline{x}) = \underline{\text{grad}} c(\underline{x})$  avec  $\underline{e}_k(\underline{k}) = \underline{k}/k$ . L'ordre zéro du développement WKB, qui conduit donc à l'équation de l'Eikonale et au tracé de rayons, est aussi appelé "ordre de l'approximation géométrique".

L'ordre suivant (ordre un) en  $\epsilon$  est appelé "ordre de l'optique physique". On vérifie facilement qu'il conduit à l'équation :

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial t}\right) - c^2(\underline{x}) (\Delta\varphi + 2\underline{\text{grad}} \varphi \cdot \underline{\text{grad}} S) = 0. \quad (34)$$

En utilisant les définitions de  $\omega(\underline{x}, t)$  et  $\underline{k}(\underline{x}, t)$ , cette équation s'écrit

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + 2\omega\frac{\partial S}{\partial t} + c^2 \text{div} \underline{k} + 2c^2 \underline{k} \cdot \underline{\text{grad}} S = 0. \quad (35)$$

On définit alors la "densité d'énergie de l'approximation WKB" comme étant le champ  $E(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} k^2(\underline{x}, t) u_m^2(\underline{x}, t) = \frac{u_n^2}{2} k^2(\underline{x}, t) e^{2S(\underline{x}, t)}$ . En utilisant l'équation de l'Eikonale  $\omega = ck$  ainsi que l'expression de la vitesse de groupe  $\underline{c}_g = c \underline{e}_k$ , on peut écrire  $E = \frac{u_n^2 \omega^2}{2c^2} e^{2S}$  et  $\underline{c}_g E = \frac{u_n^2}{2} \omega \underline{k} e^{2S}$ . En utilisant l'équation (35), on vérifie que l'on a

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \text{div} (\underline{c}_g E) = \frac{u_n^2}{2} k e^{2S} \left(\frac{\partial\omega}{\partial t} + \underline{c}_g \cdot \underline{\text{grad}} \omega\right) = 0 \quad (36)$$

où l'on a utilisé l'invariance de  $\omega(\underline{x}, t)$  le long des rayons que l'on a démontré dans le cas d'une relation de dispersion quelconque à l'aide de l'équation de l'Eikonale. L'équation  $\frac{\partial E}{\partial t} + \text{div} (\underline{c}_g E) = 0$  indique que  $\underline{c}_g E$  est le flux de l'énergie  $E$  dans le cadre de l'approximation WKB. Nous allons voir que ce résultat peut s'obtenir directement à partir de l'équation de conservation de l'énergie de l'équation des ondes, à condition de moyenner cette énergie sur la période locale du paquet d'ondes.

### 3.2 Conservation de l'énergie moyennée

On peut définir une relation de conservation de l'énergie associée à l'équation des ondes  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(\underline{x}) \Delta u = 0$  en notant

$$W(\underline{x}, t) = \frac{1}{2c^2(\underline{x})} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\text{grad } u)^2 \quad \text{et} \quad \underline{I}(\underline{x}, t) = -\frac{\partial u}{\partial t} \text{grad } u \quad (37)$$

que l'on appelle respectivement la "densité d'énergie volumique" et le "vecteur flux d'énergie". On vérifie en effet facilement la relation

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div } \underline{I} = 0. \quad (38)$$

Dans le cas *homogène*  $c(\underline{x}) = c_0$ , une onde plane monochromatique  $u(\underline{x}, t) = u_m e^{i\underline{k}\cdot\underline{x} - i\omega t}$  avec  $u_m \in \mathcal{C}$  constant est solution à condition que soit vérifiée la relation de dispersion  $\omega = c_0 k$ . On définit alors la moyenne d'un champ  $b$  sur une période  $T = 2\pi/\omega$  par la relation

$$\langle b \rangle^T = \frac{1}{T} \int_0^T b \, dt. \quad (39)$$

En définissant  $W_{\text{cin}} = \frac{1}{2c^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$  l'énergie cinétique et  $W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} (\text{grad } u)^2$ , on peut écrire  $\langle W_{\text{cin}} \rangle^T = \langle W_{\text{pot}} \rangle^T = \frac{1}{4} k^2 |u_m|^2$  et  $\langle \underline{I} \rangle^T = \frac{1}{2} \omega k |u_m|^2 \underline{e}_k$ . Comme  $\langle W \rangle^T = \langle W_{\text{cin}} \rangle^T + \langle W_{\text{pot}} \rangle^T$ , on peut écrire

$$\langle W \rangle^T = \frac{1}{2} k^2 |u_m|^2 \quad \text{et} \quad \langle \underline{I} \rangle^T = \underline{c}_g(\underline{k}) \langle W \rangle^T \quad (40)$$

avec  $\underline{c}_g(\underline{k}) = c_0 \underline{e}_k(\underline{k})$  et  $\underline{e}_k(\underline{k}) = \underline{k}/k$ .

Dans le cas *inhomogène* mais dispersé, les ondes monochromatiques sont remplacées par des trains d'ondes  $u(\underline{x}, t) = u_m(\underline{x}, t) e^{i\varphi(\underline{x}, t)}$  avec  $u_m$  réel sans perte de généralité. Le vecteur d'onde local  $\underline{k}(\underline{x}, t) = \text{grad } \varphi(\underline{x}, t)$  permet de définir une période locale  $T(\underline{x}, t) = 2\pi/\omega(\underline{x}, t)$ . On peut alors définir la moyenne locale  $\langle b \rangle^{T(\underline{x}, t)}$  d'un champ  $b$  dans la mesure où l'on suppose que la période  $T(\underline{x}, t)$  varie sur une échelle de temps lente par rapport à sa valeur. On peut voir alors la solution  $u(\underline{x}, t)$  comme étant localement une onde monochromatique. Ceci permet alors d'écrire

$$\langle W \rangle^{T(\underline{x}, t)}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} k^2(\underline{x}, t) u_m^2(\underline{x}, t) \quad (41)$$

ainsi que

$$\langle \underline{I} \rangle^{T(\underline{x}, t)}(\underline{x}, t) = \underline{c}_g[\underline{k}(\underline{x}, t), \underline{x}] \langle W \rangle^{T(\underline{x}, t)}(\underline{x}, t). \quad (42)$$



Comme l'énergie  $\langle W \rangle^T(\underline{x}, t)$  moyennée sur la période locale  $T(\underline{x}, t)$  n'est autre que l'énergie  $E(\underline{x}, t)$  de l'approximation WKB, on a donc démontré, pour le premier modèle  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(\underline{x}) \Delta u = 0$ , la relation

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle W \rangle^T + \text{div} \left( \underline{c}_g \langle W \rangle^T \right) = 0. \quad (43)$$

Si l'on considère maintenant le *deuxième* modèle  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \text{div} [c^2(\underline{x}) \underline{\text{grad}} u] = 0$ , on montre que l'approximation de l'optique géométrique conduit à la même équation de l'Eikonale  $\omega(\underline{x}, t) = c(\underline{x}) k(\underline{x}, t)$ . On peut alors définir l'énergie et son flux par les nouvelles relations

$$W(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{c^2(\underline{x})}{2} (\underline{\text{grad}} u)^2 \quad \text{et} \quad \underline{I}(\underline{x}, t) = -c^2(\underline{x}) \frac{\partial u}{\partial t} \underline{\text{grad}} u. \quad (44)$$

On montre que l'on retrouve les deux relations importantes

$$\langle \underline{I} \rangle^T = \underline{c}_g \langle W \rangle^T \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle W \rangle^T + \text{div} \left( \underline{c}_g \langle W \rangle^T \right) = 0 \quad (45)$$

où la moyenne est effectuée sur la période locale  $T(\underline{x}, t)$ .

D'une manière générale, pour tous les modèles de la mécanique des fluides classiquement considérés, il est possible de définir une densité volumique d'énergie  $W(\underline{x}, t)$  et son flux  $\underline{I}(\underline{x}, t)$  puis de vérifier les deux relations importantes ci-dessus. Par exemple, le cas des ondes de surface conduit aux égalités

$$W = \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} \rho_0 \underline{U}^2 dz + \frac{1}{2} \rho_0 g \eta^2 \quad \text{et} \quad \underline{I} = \int_{-h}^{\eta} \tilde{p} \underline{U}_H dz \quad (46)$$

où  $\underline{U}_H = (u, v)$  est la projection horizontale du champ de vitesse  $\underline{U} = (u, v, w) = \underline{\text{grad}} \phi$ . On a  $\langle W_{\text{cin}} \rangle^T = \langle W_{\text{pot}} \rangle^T$ ,  $\langle W \rangle^T = \frac{1}{2} \rho_0 g |\eta_m|^2$  et  $\langle \underline{I} \rangle^T = \underline{c}_g \langle W \rangle^T$  avec la relation de dispersion  $\Omega(\underline{k}, \underline{x}) = \sqrt{g k \tanh[k h(\underline{x})]}$ , la vitesse de phase  $\underline{c}_\varphi = \frac{\omega}{k} \underline{e}_k$  et la vitesse de groupe  $\underline{c}_g = \underline{c}_\varphi \left( \frac{1}{2} + \frac{k h}{\sinh(2 k h)} \right)$ .

### 3.3 Conservation de l'action

Le cas le plus général pour le tracé de rayons consiste à considérer une relation de dispersion  $\omega = \Omega(\underline{k}, \underline{x}, t)$  dépendant lentement du temps en plus de l'espace, ce qui conduit à un système dynamique hamiltonien non autonome qui s'écrit

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\text{grad}}_{\underline{k}} \Omega(\underline{k}, \underline{x}, t) \quad \text{et} \quad \dot{\underline{k}} = -\underline{\text{grad}}_{\underline{x}} \Omega(\underline{k}, \underline{x}, t). \quad (47)$$

La pulsation n'est alors plus constante le long des rayons et l'on peut écrire

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}, t) \cdot \underline{\text{grad}} \omega = \frac{\partial \Omega}{\partial t}(\underline{k}, \underline{x}, t). \quad (48)$$

L'équation de conservation de l'énergie moyennée sur la période locale  $T(\underline{x}, t)$  n'est plus valable et doit être remplacée, pour tous les modèles de la mécanique des fluides classiquement considérés, par l'équation de conservation de "l'action"  $\langle W \rangle^{T(\underline{x}, t)} / \omega$  qui s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\langle W \rangle^T}{\omega} \right) + \text{div} \left( \underline{c}_g \frac{\langle W \rangle^T}{\omega} \right) = 0. \quad (49)$$

On vérifie ce résultat en généralisant respectivement les deux modèles d'équation des ondes précédents aux deux modèles suivants :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{c^2(\underline{x}, t)} \frac{\partial u}{\partial t} \right] - \Delta u = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \text{div} \left[ c^2(\underline{x}, t) \underline{\text{grad}} u \right] = 0. \quad (50)$$

Ce résultat n'est cependant pas valide pour l'équation  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c(\underline{x}, t) \Delta u = 0$ , ce qui laisse penser qu'elle ne correspond pas à un modèle provenant de la physique ou de la mécanique. Sans entrer dans les détails, la raison profonde de ce résultat est la possibilité de dériver les deux modèles physiques (50) d'un principe variationnel faisant respectivement intervenir les "Lagrangiens"

$$\begin{aligned} L_{\text{agrangien}} \left( \frac{\partial u}{\partial t}, \underline{\text{grad}} u, u \right) &= \frac{1}{2c^2(\underline{x}, t)} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} u)^2 \\ \text{et } L_{\text{agrangien}} \left( \frac{\partial u}{\partial t}, \underline{\text{grad}} u, u \right) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{c^2(\underline{x}, t)}{2} (\underline{\text{grad}} u)^2. \end{aligned} \quad (51)$$

Il en va de même pour les modèles de la mécanique des fluides classiquement considérés. Le lien entre l'existence d'un principe variationnel et la conservation de l'action est détaillé dans l'ouvrage intitulé "Linear and Nonlinear Waves" de J. Lighthill, Cambridge University Press 1978.

Dans le cas où la relation dispersion  $\Omega(\underline{k}, \underline{x})$  ne dépend pas du temps, on retrouve l'équation de conservation de l'énergie en utilisant la relation de conservation de la pulsation  $\frac{\partial \omega}{\partial t} + \underline{c}_g \cdot \underline{\text{grad}} \omega = 0$ .

Dans de nombreuses applications, il est courant de considérer un milieu fluide animé d'un courant moyen  $\underline{V}(\underline{x}, t)$  et dont la relation de dispersion intrinsèque (sans courant) est  $\omega_i = \Omega_i(\underline{k}, \underline{x}, t)$ . Si  $\underline{V}(\underline{x}, t)$  varie lentement en espace et en temps, on peut étudier ce cas en considérant la nouvelle relation de dispersion

$\omega = \Omega_i(\underline{k}, \underline{x}, t) + \underline{k} \cdot \underline{V}(\underline{x}, t)$ . Si on note  $W_i$  l'énergie intrinsèque du fluide, on doit alors considérer la nouvelle énergie  $W = W_i + \frac{1}{2}\rho_0 \underline{V}^2$  où  $\rho_0$  est la masse volumique du fluide. La nouvelle vitesse de groupe est alors  $\underline{c}_g = \underline{c}_{gi} + \underline{V}$ . On montre alors (voir par exemple l'ouvrage "Waves interaction and fluid flows", A. D. D. Craik, Cambridge University Press 1985, 1988) que  $W_i/\omega_i = W/\omega$ , ce qui entraîne que la nouvelle équation de conservation de l'action

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\langle W \rangle^T}{\omega} \right) + \text{div} \left( \underline{c}_g \frac{\langle W \rangle^T}{\omega} \right) = 0 \quad (52)$$

est équivalente à

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\langle W_i \rangle^T}{\omega_i} \right) + \text{div} \left[ (\underline{c}_{gi} + \underline{V}) \frac{\langle W_i \rangle^T}{\omega_i} \right] = 0. \quad (53)$$

## Conclusion

Nous avons donc montré que la propagation d'un paquet d'onde dispersé dans un milieu dispersif ou non dispersif, homogène ou inhomogène, pouvait être décrite par un tracé de rayons. Un résultat marquant de cette théorie de la réfraction est que le tracé de rayons ne dépend que de la relation de dispersion  $\Omega(\underline{k}, \underline{x}, t)$ . Les rayons se propagent avec la vitesse de groupe locale  $\underline{c}_g = \text{grad}_{\underline{k}} \Omega$  en transportant un vecteur d'onde local dont la modulation obéit à la loi  $\dot{\underline{k}} = -\text{grad}_{\underline{x}} \Omega$ . Dans le cas homogène, les rayons sont des droites qui transportent des vecteurs d'onde constants. Dans le cas souvent rencontré où  $\Omega$  ne dépend pas du temps, les rayons peuvent être courbes avec un vecteur d'onde variable mais la pulsation locale reste constante en suivant un rayon. Dans tous les cas, le système régissant le tracé de rayons dépend d'un "Hamiltonien" qui n'est autre que la fonction  $\Omega(\underline{k}, \underline{x}, t)$ .

Ce schéma est valable à condition que la pulsation locale  $\omega(\underline{x}, t)$ , le vecteur d'onde local  $\underline{k}(\underline{x}, t)$ , l'amplitude locale  $u_m(\underline{x}, t)$  et l'inhomogénéité  $\Omega(\underline{k}, \underline{x}, t)$  du milieu varient sur des échelles d'espace et de temps grandes devant les longueurs d'ondes et les périodes. Ces hypothèses sont à la base du développement asymptotique WKB qui permet de justifier la présente théorie de la réfraction. L'ordre dominant de cette approximation (ordre de l'optique géométrique) permet de justifier le tracé de rayons à travers l'équation de l'Eikonale qui n'est autre que la liaison entre la pulsation locale et le vecteur d'onde local à travers la relation de dispersion.

Le second ordre de l'approximation WKB (ordre de l'optique physique) indique que l'énergie dans le cas où  $\Omega$  ne dépend pas du temps, l'action dans le cas général, est transportée le long des rayons, donc avec la vitesse de groupe.

Là encore, il est possible de formuler ce résultat de la théorie de la réfraction sous une forme très générale qui ne dépend pas du détail des équations du modèle mais simplement de l'expression de l'énergie et de son flux. À partir du traitement explicite du cas de l'équation des ondes, nous avons admis sans démonstration une loi de conservation de l'action  $\langle W \rangle^T / \omega$  où  $\langle \rangle^T$  désigne la moyenne sur une période locale et  $W$  la densité volumique de l'énergie. La justification de ce résultat, que nous avons choisi de ne pas détailler ici, repose sur l'existence d'un “principe variationnel” sous-jacent à tout système d'équations issu des lois de conservation de la mécanique.

Les applications pratiques de ce schéma général de la théorie de la réfraction sont nombreuses et permettent d'en assimiler les différents concepts. Par exemple, on démontre facilement la “loi de Snel” (ou Snell), valable lorsque le milieu n'est homogène que dans une direction, qui exprime l'invariance de  $n \sin \theta$  où  $n$  est l'indice de réfraction et  $\theta$  l'angle du vecteur d'onde avec cette direction. On peut aussi associer le tracé de rayons au “principe de Huyghens” qui consiste à propager les surfaces ou lignes d'isophasse en traçant l'enveloppe de sphères ou cercles dont les rayons sont proportionnels aux vitesses de phases locales. Un résultat plus difficile à établir est le “principe de Fermat” qui dit que le tracé de rayon d'un point à un autre est obtenu en minimisant le “chemin optique”. Le fait que le système dynamique régissant le tracé de rayons soit Hamiltonien facilite la compréhension de ce principe.

Enfin, il faut être conscient des limites d'applicabilité de cette approche par tracé de rayons. Lorsque l'amplitude des ondes varie trop rapidement en espace, il faut prendre en compte le phénomène de diffraction qui agit comme une diffusion de l'énergie entre les rayons qui la transportent. C'est le cas lorsqu'il existe des “zones d'ombres” provoquées par des frontières faisant “écran” à une partie des rayons. Lorsque les rayons se coupent, les paquets d'ondes ne se plus dispersés et la conservation de l'action le long des rayons conduit à des amplitudes infinies. Il est cependant possible d'appliquer un développement asymptotique au voisinage des caustiques, qui sont les enveloppes des rayons, en étendant l'approximation WKB au cas de ce que l'on appelle les “points tournants”. Les paquets d'ondes dispersés sont alors remplacés par des “fonctions d'Airy” qui font passer continuellement d'un comportement oscillatoire (les paquets d'ondes) à un comportement amorti (les zones d'ombre).