EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 0.1 Loi de Snel

On considère un milieu 2D inhomogène caractérisé par une relation de dispersion $\omega = \Omega(k_1, k_2, x)$ indépendante de la coordonnée y. On considère un champ d'ondes suffisamment dispersé pour que l'équation de l'Eikonale soit valide et l'on s'intéresse à une région de l'espace où les rayons ne se coupent pas.

1) Écrire le système dynamique régissant le tracé d'un rayon $[\underline{x}(t), \underline{k}(t)]$ où $\underline{k}(t)$ est le vecteur d'onde du champ d'ondes au point $\underline{x}(t)$.
2) On définit les coordonnées polaires (k, θ) d'un vecteur d'onde $\underline{k}$ par les relations $k_1 = k\,\cos\theta$ et $k_2 = k\,\sin\theta$. On considère deux points A et B de coordonnées $\underline{x}_A$ et $\underline{x}_B$ appartenant à un même rayon. On note $\underline{k}_A$ et $\underline{k}_B$ les vecteurs d'ondes aux points A et B et (k_A, θ_A) et (k_B, θ_B) les coordonnées polaires associées. Démontrer que $k_A\,\sin\theta_A = k_B\,\sin\theta_B$.
3) On suppose maintenant que la relation de dispersion s'écrit $\Omega(\underline{k}, \underline{x}) = c(x)\,k$ où k est le module de $\underline{k}$ et $c(x) > 0$ ne dépend par de y. On appelle "indice de réfraction" le nombre $n(\underline{x}) = c_0/c(x)$ où c_0 est une vitesse de référence constante. Démontrer la loi de Snel $n_A\,\sin\theta_A = n_B\,\sin\theta_B$ où n_A et n_B sont les indices de réfraction des points A et B.

Corrigé page **??**

PROBLÈME 0.2 KdV à coefficients constants

On s'intéresse aux trains d'ondes dispersés $u(x,t) = u_m(x,t)\,e^{i\,\varphi(x,t)}$, avec $u_m(x,t)$ réel positif, solutions de l'équation de Korteweg de Vries linéaire $\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\,\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$ dans un domaine infini 1D. On suppose que $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

On suppose que l'amplitude locale $u_m(x,t)$, la pulsation locale $\omega(x,t) = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)$ et le vecteur d'onde local $k_1(x,t) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ varient lentement en espace (échelle $\mathcal{L}$) et en temps (échelle $\mathcal{T}$) par rapport aux périodes $T(x,t) = 2\,\pi/\omega(x,t)$ et longueurs d'ondes $L(x,t) = 2\,\pi/|k_1(x,t)|$.

Pour décrire l'évolution de ces train d'ondes dispersés, on effectue un développement WKB en posant $\varphi(x,t) = \frac{1}{\epsilon}\Phi(\epsilon\,x, \epsilon\,t)$ et $u_m(x,t) = u_n\,\exp S(x,t)$ avec $S(x,t) = \Sigma(\epsilon\,x, \epsilon\,t)$.

1) Comment peut-on définir ici le petit paramètre $\epsilon \ll 1$?

2) Montrer que l'ordre dominant de l'approximation WKB conduit à une relation entre $\omega(x,t)$ et $k_1(x,t)$ que l'on précisera.
3) On définit $W(x,t) = \frac{1}{2}u^2(x,t)$. Justifier, à l'aide des hypothèses WKB, le fait que l'on puisse écrire $\langle W\rangle^T(x,t) = \frac{1}{4}u_m^2(x,t)$ à l'ordre dominant, où $T(x,t)$ est la période locale.
4) Montrer que l'on peut écrire $\frac{\partial W}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial I}{\partial x}(x,t) = 0$ où I s'exprime à l'aide d'une fonction polynomiale de u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que l'on précisera.
5) Justifier, à l'aide des hypothèses WKB, le fait que l'on puisse écrire $\langle I\rangle^T(x,t) = c_g[k_1(x,t)]\,\langle W\rangle^T(x,t)$ où $T(x,t)$ est la période locale.
6) Montrer que le second ordre de l'approximation WKB conduit à une relation de la forme :
$$\frac{\partial S}{\partial t}(x,t) + c_g[k_1(x,t)]\,\frac{\partial S}{\partial x}(x,t) = \gamma\,\frac{\partial}{\partial x}\left[k_1^2(x,t)\right]$$
où γ est une constante que l'on précisera.
7) Montrer que cette relation peut aussi s'écrire sous la forme
$$\frac{\partial}{\partial t}\left[u_m^2(x,t)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\{G[k_1(x,t)]\,u_m^2(x,t)\} = 0$$
où $G(k_1)$ est une fonction que l'on précisera en la comparant avec $c_g(k_1)$.
8) En déduire l'équation de conservation de l'action associée à l'équation de Korteweg de Vries linéaire à coefficients constants.
9) On considère la condition initiale
$$u_m(x,0) = u_{m0} \text{ et } \varphi(x,0) = \sqrt{\frac{\alpha}{27\beta}}\left[2\,x - \frac{1}{\kappa}\,\mathrm{Ln}\,\cosh(\kappa\,x)\right].$$
avec $\kappa \ll \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$. Tracer schématiquement la fonction $u(x,t)$ issue de cette condition initiale à des instants successifs (en tenant compte de l'amplitude).

Corrigé page **??**

EXERCICE 0.3 Construction de Huyghens

On s'intéresse à la réfraction d'une houle monochromatique à l'approche du littoral. On suppose que la bathymétrie est défine par la profondeur $h(\underline{x}) = h(x,y) = \alpha\,x + \beta\,\cos(\kappa\,y)$ et que la mer au repos (sans vagues) est définie par le domaine semi-infini $-h(\underline{x}) \le z \le 0$. On note g la gravité.

On suppose qu'une houle monochromatique de vecteur d'onde $\underline{k}_0 = -k_0\,\underline{e}_x$ arrive du large avec une hauteur de vagues (distance creux à crête) H_0. On s'intéresse au régime de houle établi après perte d'influence de la condition initiale.

On suppose que $\kappa \ll k_0$, $\alpha \ll 1$ et $\beta \ll k_0^{-1}$ de manière à pouvoir considérer que les trains d'ondes restent très dispersés lors de leur réfraction par le fond variable.

1) Dessiner le trait de côte associé à cette bathymétrie, ainsi que les isobathes (iso-profondeurs).
2) Dessiner le tracé de rayons et les lignes de phase de la houle au large, c'est-à-dire pour $x > 0$ grand.
3) Écrire un système d'équations différentielles ordinaires dont les trajectoires permettent le tracé de rayons du large jusqu'à la côte.
4) Dessiner les rayons issus des points vérifiant $x > 0$ grand et $y = m\pi/\kappa$ avec m entier.
5) Donner l'expression de la pulsation ω_0 au large en fonction de k_0 et de g.
6) En déduire la valeur de $\omega(\underline{x}, t)$ sur tout le domaine.
7) En déduire que le vecteur d'onde local $\underline{k}(\underline{x}, t)$ ne dépend que de $\underline{x}$.

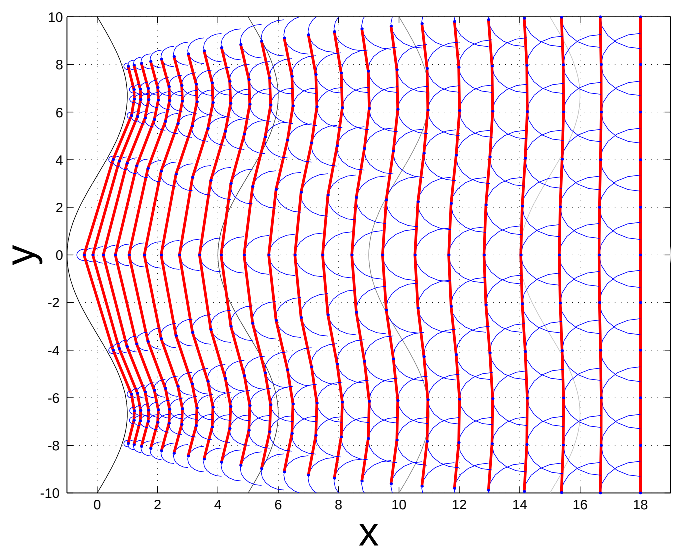

Figure 1: *Construction de Huyghens pour le tracé de rayons.*

On effectue alors la construction de Huyghens pour tracer graphiquement les rayons et les lignes de phase, en procédant de la façon suivante. À partir d'une ligne de phase $x = x_0$ parallèle à l'axe des y, c'est-à-dire suffisamment loin de la côte ($x_0 > 0$ grand), on trace des cercles de centres $\underline{x}_n = x_0\,\underline{e}_x + n\,\delta y\,\underline{e}_y$ avec n entier et de rayons respectifs $c_\varphi(\underline{x}_n)\,\delta t$ où $c_\varphi(\underline{x})$ est le module de la vitesse de phase locale en $\underline{x}$. Les quantités δy et δt sont choisies arbitrairement petites en fonction du degré de précision que l'on souhaite obtenir avec la méthode. On prend ensuite l'enveloppe de ces cercles que l'on considère comme une nouvelle ligne de phase. On répète alors la procédure en prenant les nouveaux centres des nouveaux cercles sur la nouvelle ligne de phase aux points de contact de la nouvelle ligne avec les anciens cercles. On se rapproche ainsi progressivement du rivage.

8) Expliquer pourquoi la construction de Huyghens permet d'approximer le tracé de rayons des ondes de surface dans la limite où δy et δt tendent vers zéro.
9) Tracer très schématiquement le tracé de rayons de la houle en allant jusqu'à la côte.
10) On suppose que les vagues déferlent lorsque $H(\underline{x}) = 0.78\ h(\underline{x})$ (formule de Munk 1949) où $H(\underline{x})$ est la hauteur locale des vagues. Tracer très schématiquement la ligne de déferlement des vagues.

Corrigé page **??**

$\boxed{\text{PROBLÈME 0.4}}$ Réfraction en eaux peu profondes

On considère un bassin 2D de profondeur $h(x,y) = \alpha\, x^2$ pour $x \geq 0$ avec $\alpha > 0$. Un obstacle situé en $\underline{x}_0 = (x_0, 0)$ émet des ondes de surface à la pulsation ω_0. On se place dans le cadre de l'approximation des ondes de surface en eaux peu profondes et on néglige la tension superficielle.

1) Donner l'expression du module de la vitesse de phase $c_\varphi(x,y)$ de ces ondes.
2) On cherche le tracé des rayons $[\underline{x}(t), \underline{k}(t)]$ émis par l'obstacle puis réfractés par le milieu. Écrire le système dynamique que vérifient les variables $[x(t), y(t), k(t), \theta(t)]$ en notant (k,θ) les coordonnées polaires de $\underline{k}$. On pourra utiliser les relations $dk = \cos\theta\ dk_1 + \sin\theta\ dk_2$ et $k\, d\theta = -\sin\theta\ dk_1 + \cos\theta\ dk_2$.
3) Décrire les conditions initiales de ce système dynamique devant être considérées pour effectuer le tracé de rayons des ondes émises par l'obstacle oscillant. Montrer en particulier que ces conditions initiales forment une famille à un paramètre.
4) Montrer que l'on a $\theta(t) = 2\,\mathrm{arctg}\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\exp(\beta\, t)\right]$ en précisant la valeur de la constante β. Montrer que cette fonction du temps est monotone et préciser ses bornes. Comparer avec un premier tracé de rayon intuitif dans le demi plan (x,y) avec $x \geq 0$.
5) Montrer qu'une partie du tracé de rayons dans le plan (x,y) peut s'écrire sous la forme de courbes paramétrées $[\widetilde{x}, \widetilde{y}](\theta) = \frac{x_0}{\sin\theta_0}[\sin\theta, \cos\theta_0 - \cos\theta]$ pour $\theta \in [\theta_0, \pi]$.
6) Dessiner schématiquement l'ensemble des rayons émis par l'obstacle et

préciser la nature de ces courbes dans le plan (x, y).

7) À tout point $\underline{x} = (0, y)$ du rivage (profondeur nulle) on associe le rayon qui joint l'obstacle à ce point et on note $\Theta_0(y)$ l'angle que fait ce rayon avec l'axe Ox au voisinage de l'obstacle. Montrer que $\Theta_0(y) = \pi - 2 \text{ arctg } \left|\frac{y}{x_0}\right|$ et tracer cette fonction.
8) En déduire le tracé de la répartition d'énergie qui arrive sur le rivage en fonction de y en supposant que l'amplitude des vagues autour de l'obstacle est isotrope.
9) Que devient la longueur d'onde des vagues au voisinage du rivage ? Que se passe-t-il en pratique dans ce voisinage ?

Corrigé page **??**

$\boxed{\textbf{PROBLÈME 0.5}}$ Réfraction de la croix de Saint André

On considère un fluide stratifié en densité dont la fréquence de Brunt-Väisälä est égale à $N(z) = -\beta\, z$ pour $z \leq 0$ avec $\beta < 0$. On se place dans le cadre de l'approximation de Boussinesq.

1) Tracer un profil de densité $\rho_0(z)$ induisant le profil $N(z)$ indiqué.
2) En $z = -h_0$, on fait osciller un cylindre de petite taille avec la pulsation $\omega_0 > 0$ et on s'intéresse aux ondes émises dans le cas $\omega_0 < \beta\, h_0$. Dessiner le lieu des points irradiés par les ondes internes au voisinage du cylindre.
3) Écrire le système dynamique régissant les rayons $[x(t), z(t), k_1(t), k_3(t)]$. On pourra noter θ l'angle polaire défini par $k_1 = k \cos\theta$ et $k_3 = k \sin\theta$ avec $k = \sqrt{k_1^2 + k_3^2}$. On pourra se resteindre aux cas où $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
4) Indiquer les conditions initiales pertinentes pour le tracé de rayon associé au problème du cylindre oscillant. Montrer qu'il s'agit de deux familles à un paramétre.
5) En utilisant les coordonnées polaires (k, θ) du vecteur d'onde $\underline{k}$, montrer que si A et B sont deux points d'un même rayon on peut écrire $N_A \cos\theta_A = N_B \cos\theta_B$ et $k_A \cos\theta_A = k_B \cos\theta_B$. On a note N_A et N_B les fréquences de Brunt-Väisälä en A et B.
6) Calculer l'altitude maximale $z = -h_*$ atteinte par les rayons émis par le cylindre ainsi que la vitesse de groupe des ondes à cette altitude. Vérifier que $h_* < h_0$.
7) Proposer un mécanisme de réflexion des ondes à cette altitude en dessinant schématiquement un tracé de rayon au voisinage de la ligne $z = -h_*$.
8) Dessiner un tracé de rayon global de manière schématique, sans forcément résoudre analytiquement les équations du tracé de rayons.

Corrigé page **??**

PROBLÈME 0.6 Réfraction d'ondes d'inerties

Le modèle tridimensionnel permettant de mettre en évidence les ondes d'inertie 3D s'écrit

$$\begin{aligned}\rho_0 \left(\frac{d\underline{U}}{dt} + 2\,\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{U} \right) &= -\mathrm{gr\underline{ad}} \left[p - \frac{1}{2} \left(\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x} \right)^2 \right] - \rho_0\, g\, \underline{e}^{(3)} \\ \mathrm{div}\, \underline{U} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

où $\underline{e}^{(3)}$ est le vecteur unitaire vertical, g est l'intensité de la gravité supposée constante et $\underline{\Omega}_0$ un vecteur constant que l'on suppose égal à $\underline{\Omega}_0 = \frac{1}{2}\, f\, \underline{e}^{(3)}$. La notation $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U} \cdot \mathrm{gr\underline{ad}}$ désigne la dérivée particulaire.

On admet ici que la relation de dispersion des ondes d'inertie 3D s'écrit : $\omega = \Omega(\underline{k}) = f\ |\sin\theta(\underline{k})|$ avec $\theta(\underline{k}) = \arcsin(k_3/k_H)$ et $k_H = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$. On note $\underline{e}_H(\underline{k}) = (k_1\, \underline{e}^{(1)} + k_2\, \underline{e}^{(2)})/k_H$, $\underline{e}_k(\underline{k}) = \underline{k}/k$ et $\underline{e}_\theta(\underline{k}) = -\sin\theta(\underline{k})\, \underline{e}_H + \sin\theta(\underline{k})\, \underline{e}^{(2)}$. Dans tout ce qui suit, on se restreint au cas $\theta(\underline{k}) \geq 0$.

1) Dans le cas homogène où f est constant, montrer que la vitesse de groupe est $\underline{c}_g(\underline{k}) = (f/k)\ \cos\theta(\underline{k})\ \underline{e}_\theta(\underline{k})$.

On suppose maintenant que le paramètre f dépend de l'espace à travers la relation $f(\underline{x}) = \beta\, y$ où β est une constante positive. On s'intéresse alors au tracé de rayons d'un paquet d'onde décrit par $\underline{X}(\underline{x}, t) = \mathrm{Re}\left[X_m\, e^{i\, \varphi(\underline{x}, t)} \right]$ où $\underline{X} = (\underline{U}, p)$ désigne les champs oscillants solutions des modèle. On suppose que le vecteur d'onde local défini par $\underline{k}(\underline{x}, t) = \mathrm{gr\underline{ad}}\ \varphi(\underline{x}, t)$ vérifie partout $\Omega(\underline{k})\, \|\underline{k}\| \ll \beta$. On est donc dans le cas où l'approximation WKB est valide et on suppose que la pulsation locale définie par $\omega(\underline{x}, t) = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\underline{x}, t)$ est reliée au vecteur d'onde local par la relation de dispersion $\omega = \Omega(\underline{k}, \underline{x}) = f(\underline{x})|\sin\theta(\underline{k})|$. On s'intéresse aux tracés de rayon permettant de décrire l'évolution de ce paquet d'ondes dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique.

2) On suppose que le couple $[\underline{x}(t), \underline{k}(t)]$ constitue le tracé de rayon d'un tel paquet d'ondes. Donner l'expression de $\frac{d}{dt}\underline{x}(t)$ et $\frac{d}{dt}\underline{k}(t)$ en fonction de β, $y(t)$, $\theta[\underline{k}(t)]$, $\underline{e}_\theta[\underline{k}(t)]$ et de $k(t)$.
3) Expliciter ces expressions en écrivant le système d'équations différentielles ordinaires couplant les six variables $[x(t), y(t), z(t), k_1(t), k_2(t), k_3(t)]$.

On considère à présent le cas particulier où $\underline{k}(\underline{x}, 0) = k_2(\underline{x}, 0)\ \underline{e}^{(2)} + k_3(\underline{x}, 0)\ \underline{e}^{(3)}$, c'est-à-dire $k_1(\underline{x}, 0) = 0$ à l'instant intial.

4) Montrer que $k_1(\underline{x}, t) = 0$ pour tout temps t et que le système se ramène à la résolution d'un système couplé pour les variables $y(t)$ et $k_2(t)$ que l'on explicitera.
5) Montrer que ce système à deux variables est hamiltonien. Expliciter l'Hamiltonien $H(k_2, y)$.
6) En déduire les rayons parcourent des courbes $H(k_2, y) = H_0$ dans le plan (k_2, y) et préciser la valeur de H_0 associée à un tracé de rayon donné.
7) Représenter graphiquement ces courbes dans le plan $(k_2/k_3, \beta\, y)$.
8) Indiquer le sens de variation de $z(t)$ pour un rayon situé dans le domaine $y > 0$. En déduire un tracé schématique du rayon dans le plan (y, z).
9) À quels écoulements ce modèle inhomogène pourrait-il s'appliquer ?

Corrigé page **??**