FORMULAIRE

PAQUETS D'ONDES ET MILIEUX

Équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(\underline{x})\,\Delta u = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \text{div}\,\left[c^2(\underline{x})\,\underline{\text{grad}}\,u\right] = 0$$

Cas homogène : $\omega = \Omega(\underline{k}) = c_0\,k$ et $\underline{c}_g(\underline{k}) = \underline{c}_\varphi(\underline{k}) = c_0\,\underline{e}_k$

Ondes de surface

$$\omega = \Omega(\underline{k}) = \sqrt{g\,k\tanh(k\,h_0)} \qquad \text{et} \qquad \underline{c}_g(\underline{k}) = c_\varphi(k)\left[\frac{1}{2} + \frac{k\,h_0}{1+\sinh(2\,k\,h_0}\right]$$

Paquets d'ondes dispersés

$$u(\underline{x},t) = u_m(\underline{x},t)\;e^{i\,\varphi(\underline{x},t)}$$

$$\omega(\underline{x},t) = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\underline{x},t) \qquad \text{et} \qquad \underline{k}(\underline{x},t) = \underline{\text{grad}}\;\varphi(\underline{x},t)$$

TRACÉ DE RAYONS

Équation de l'Eikonale

$$\omega(\underline{x},t) = \Omega[\underline{k}(\underline{x},t),\underline{x},t] \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\underline{x},t) = \Omega[\underline{\text{grad}}\;\varphi(\underline{x},t),\underline{x},t]$$

Vitesse de groupe locale : $\underline{c}_g(\underline{k},\underline{x},t) = \underline{\text{grad}}_k\Omega(\underline{k},\underline{x},t)$

Tracé de rayons dans le cas général

$$\frac{\partial\underline{k}}{\partial t} + \underline{c}_g(\underline{k},\underline{x},t)\cdot\underline{\text{grad}}\;\underline{k} = -\underline{\text{grad}}_x\Omega(\underline{k},\underline{x},t)$$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{c}_g(\underline{k},\underline{x}) = \underline{\text{grad}}_k\Omega(\underline{k},\underline{x},t) \qquad \text{et} \qquad \dot{\underline{k}} = -\underline{\text{grad}}_x\Omega(\underline{k},\underline{x},t)$$

Système dynamique Hamiltonien : $H(\underline{q},\underline{p},t) = \Omega(\underline{k},\underline{x},t)$

Cas particuliers

Milieu homogène : $\underline{x}(t) = \underline{a} + \underline{c}_g(\underline{k})\;t$ et $\underline{k}(t) = \underline{\kappa}$

Milieu stationnaire : $\frac{\partial\omega}{\partial t} + \underline{c}_g(\underline{k},\underline{x})\cdot\underline{\text{grad}}\;\omega = 0$

MÉTHODE WKB ET RÉFRACTION

Développement asymptotique

$$u(\underline{x},t) = u_m(\underline{x},t)\; e^{i\,\varphi(\underline{x},t)} = u_n\, e^{i\,\varphi(\underline{x},t)+S(\underline{x},t)} = u_n\, e^{\frac{i}{\epsilon}\Phi(\epsilon\,\underline{x},\epsilon\,t)+\Sigma(\epsilon\,\underline{x},\epsilon\,t)}\;,$$

Exemple de l'équation de ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(\underline{x})\,\Delta u = 0$

$$\omega(\underline{x},t) = c^2(\underline{x})\,k(\underline{x},t) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial E}{\partial t} + \text{div}\,\left(\underline{c}_g E\right) = 0$$

avec $E(\underline{x},t) = \frac{1}{2}k^2(\underline{x},t)\,u_m^2(\underline{x},t)$.

Conservation de l'action

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\langle W\rangle^T}{\omega}\right) + \text{div}\,\left(\underline{c}_g \frac{\langle W\rangle^T}{\omega}\right) = 0$$

pour les modèles découlant d'un principe variationnel.