Article Pédagogique Multimedia

O. Thual, APM-INPT **thu-reladi** *(2003)*

1

Relations de dispersion des ondes dans les fluides

Objectif : Calculer la relation de dispersion des ondes pour trois modèles de base d'écoulements.

2

1 Ondes sonores

Ondes sonores : oscillations longitudinales des particules fluides

La viscosité est négligeable et l'entropie des particules reste constante.

3

1.1 Équations d'Euler compressibles

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{U} \;, \qquad \rho \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\mathrm{grad}}\; p \;, \qquad \rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \underline{U} \;,$$

deux lois d'état $p = \mathcal{P}(\rho, s)$ et $e = \mathcal{E}(\rho, s)$ et la relation de Gibbs :

$$\frac{de}{dt} = T \frac{ds}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \;.$$

Variables $(\underline{x}, t) = (x, y, z, t)$, ρ : masse volumique, $\underline{U}$: vitesse, p : pression, e : énergie interne spécifique, s : entropie spécifique.

On montre que $\frac{ds}{dt} = 0$: écoulement isentropique.

Après élimination de l'énergie interne, on a :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{U} \;, \qquad \rho \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\mathrm{grad}}\; p \;, \qquad \rho \frac{ds}{dt} = 0$$

accompagnées de la loi d'état $p = \mathcal{P}(\rho, s)$.

4

1.2 Relation de dispersion des ondes sonores

Petites pertubations $(\rho, p, s, \underline{U}) = (\rho_0, p_0, s_0, \underline{0}) + (\tilde{\rho}, \tilde{p}, \tilde{s}, \underline{U})$ autour d'un état de base homogène vérifiant $p_0 = \mathcal{P}(\rho_0, s_0)$.

• Linéarisation des équations autour de l'état de base en négligeant les termes d'ordre deux ($\underline{U} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\; \tilde{\rho}$, $\underline{U} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\; \underline{U}$, $\underline{U} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\; \tilde{s}$) :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} \underline{U} \;, \quad \rho_0 \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\underline{\mathrm{grad}}\; \tilde{p} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} = 0 \;.$$

• On suppose $\tilde{s} = 0$, l'écoulement reste "homoentropique" et donc

$$\tilde{p} = c^2 \,\tilde{\rho} \qquad \text{avec} \qquad c^2 = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_s (\rho_0, s_0) \;.$$

• Éliminination de la pression : $\frac{\partial}{\partial t} \underline{\Omega} = \underline{0}$

On suppose $\underline{\Omega} = \underline{0}$; l'écoulement reste potentiel et donc $\underline{U} = \underline{\mathrm{grad}}\; \phi$

APM-INPT **thu-reladi (2003), O. Thual December 15, 2006**

5 • On obtient alors le système

$$\frac{\partial \tilde\rho}{\partial t} = -\rho_0\, \Delta\phi\ , \qquad \rho_0\, \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\tilde p \quad \text{et} \quad \tilde p = c^2\, \tilde\rho\ .$$

(constante d'intégration de l'équation de Bernouilli choisie nulle).

• En éliminant $\tilde\rho$ et $\tilde p$ dans ce système on obtient finalement

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2\, \Delta\phi = 0\ .$$

• Ondes planes : $\phi = \phi_m\ \exp(i\underline{k}\cdot\underline{x} - i\omega\ t)$ solutions à condition de vérifier la relation de (non-)dispersion $\omega^2 = c^2\ k^2$.

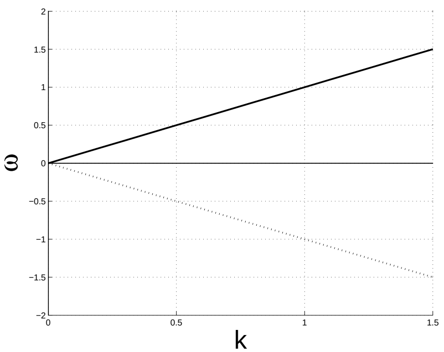
• Comme on ne s'intéresse qu'aux solutions réelles :

solution complexe $(\phi_m, \omega, k) \iff$ solution complexe $(\phi_m^*, -\omega, -k)$

On peut donc adopter le la convention qui consiste à se limiter aux pulsations $\omega \geq 0$.

6 • La relation de (non-) dispersion des ondes sonore est :

$$\omega = c\ k\ .$$



La convention $\omega \geq 0$ conduit à ignorer les courbes en pointillés.

7

1.3 Champs oscillants des ondes sonores

Les équations d'Euler compressibles linéarisées s'écrivent

$$\begin{aligned} \rho_0\, \frac{\partial\phi}{\partial t} + \tilde p &= 0 \\ \rho_0\ \Delta\phi + \frac{\partial\tilde\rho}{\partial t} &= 0 \\ c^2\ \tilde\rho - \tilde p &= 0\ . \end{aligned}$$

Une quatrième équation $\widetilde{\frac{\partial s}{\partial t}} = 0$ est découplée de ces trois équations.

Les ondes planes $(\phi, \tilde\rho, \tilde p) = (\phi_m, \rho_m, p_m)\exp(i\underline{k}\cdot\underline{x} - i\omega t)$ vérifient

$$\begin{pmatrix} -i\rho_0\,\omega & 0 & 1 \\ -\rho_0\, k^2 & -i\omega & 0 \\ 0 & c^2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_m \\ \rho_m \\ p_m \end{pmatrix} = 0\ .$$

8 On en déduit la relation de dispersion $w^2 = c^2\, k^2$ et la relation

$$(\phi_m, \rho_m, p_m) = \phi_m\left(1\ , i\frac{\rho_0\omega}{c^2}, i\rho_0\omega\right)\ .$$

On peut choisir ϕ_m réel sans perte de généralité.

L'expression d'une onde plane progressive est alors

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_m\ \cos(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega t) \\ \tilde\rho &= -\phi_m\ \rho_0\ (\omega/c^2)\ \sin(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega t) \\ \tilde p &= -\phi_m\ \rho_0\ \omega\ \sin(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega t) \end{aligned}$$

On en déduit l'expression de la vitesse $\underline{U} = \underline{\text{grad}}\ \phi$ qui s'écrit :

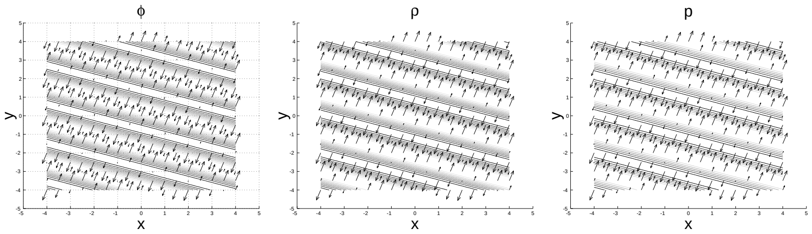
$$\underline{U} = -\phi_m\, \underline{k}\, \sin(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega t)\ .$$

On note que le vecteur vitesse $\underline{U}$ est parallèle au vecteur d'onde $\underline{k}$.

APM-INPT **thu-reladi (2003), O. Thual December 15, 2006**

9

Les ondes sonores sont donc des vibrations longitudinales.



Vitesse de phase de l'onde : $\underline{c}_\varphi(\underline{k}) = c\ \underline{e}_k(\underline{k})$ où $\underline{e}_k(\underline{k}) = \underline{k}/k$

Avec la convention $\omega \geq 0$, la vitesse de phase est toujours orientée dans la direction de $\underline{k}$.

10

2 Ondes de gravité internes

Oscillations de particules dans un fluide stablement stratifié en densité dans la direction verticale.

Comme ces oscillations de gravité sont beaucoup plus lentes que les oscillations de compressibilité, il est possible de “filtrer” les ondes sonores en construisant un modèle qui ne décrit que les ondes de gravité. C'est dans cette optique qu'est établie l'approximation de Boussinesq.

11

2.1 Approximation de Boussinesq

On considère les équations d'Euler écrites sous la forme

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{U}\ , \qquad \rho\ \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\mathrm{grad}}\ p - \rho g\ \underline{e}^{(3)} \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dt} = 0$$

avec l'équation d'état : $p = \mathcal{P}(\rho, s)$

L'énergie interne e a été éliminée via l'équation de Gibbs

Fluide stratifié au repos : $\rho_0(z)$ quelconque avec $\underline{U} = \underline{0}$

On en déduit la pression $p_0(z)$ et l'entropie $s_0(z)$ en imposant :

$$\frac{d}{dz} p_0(z) = -\rho_0(z)\ g \qquad \text{et} \qquad p_0 = \mathcal{P}(\rho_0, s_0)$$

12

L'approximation de Boussinesq se décompose en deux étapes :

• **Première étape** : écoulement est incompressible

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0\ , \qquad \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \rho\ \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\mathrm{grad}}\ p - \rho\ g\ \underline{e}^{(3)}\ .$$

L'équation $\frac{ds}{dt} = 0$ est découplée du modèle et peut donc être ignorée.

• **Deuxième étape :** ρ_r constante de référence

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0\ , \quad \frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \frac{N^2}{g}\ \rho_r\ w \quad \text{et} \quad \rho_r\ \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\mathrm{grad}}\ \tilde{p} - \tilde{\rho}\ g\ \underline{e}^{(3)}$$

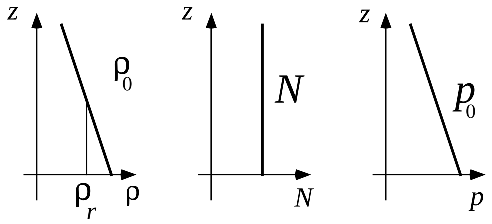
où $\rho = \rho_0(z) + \tilde{\rho}$, $p = p_0(z) + \tilde{p}$, $w = \underline{U} \cdot \underline{e}^{(3)}$ et $N^2(z) = -\frac{g}{\rho_r} \frac{d\rho_0}{dz}$.

La seule approximation effectuée a été de remplacer ρ par ρ_r dans le terme $\rho\ \frac{d\underline{U}}{dt}$ de l'équation de quantité de mouvement.

APM-INPT **thu-reladi (2003), O. Thual December 15, 2006**

13 N est appelée la fréquence de Brunt-Väisälä et s'écrit :

$$N(z) = \sqrt{-\frac{g}{\rho_r}\frac{d\rho_0(z)}{dz}} \; .$$



Il est courant de considérer N constant, ce qui conduit à un système invariant par toutes les translations d'espace.

2.2 Relation de dispersion des ondes internes

14 Le système linéarisé $\left(\frac{d}{dt} \to \frac{\partial}{\partial t}\right)$ autour de l'état de base s'écrit

$$\mathrm{div}\, \underline{U} = 0 \;, \qquad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{N^2}{g}\,\rho_r\, w \quad \text{et} \quad \rho_r \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\underline{\mathrm{grad}}\, \tilde{p} - \tilde{\rho}\, g\, \underline{e}^{(3)}$$

Divergence de l'équation de la quantité de mouvement :

$$\Delta \tilde{p} = -g\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} \;, \qquad \rho_r \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} - \tilde{\rho}\, g \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{N^2}{g}\rho_r\, w \;.$$

Élimination de $\tilde{p}$: en posant $\Delta_H = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ et on obtient

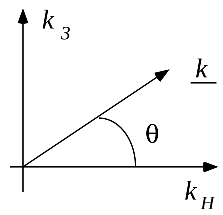
$$\rho_r \frac{\partial}{\partial t}\Delta w = g\frac{\partial^2}{\partial z^2}\tilde{\rho} - g\,\Delta\tilde{\rho} = -g\,\Delta_H\,\tilde{\rho}$$

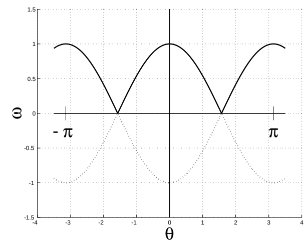
On élimine $\tilde{\rho}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta w + N^2\,\Delta_H\, w = 0 \;.$$

15 **Dans le cas N constant :** les ondes planes $w = w_m\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{x} - i\omega t}$ sont solutions ssi la relation de dispersion suivante est vérifiée :

$$\omega^2 = N^2 \frac{k_H^2}{k^2} \qquad \text{avec} \quad k_H^2 = k_1^2 + k_2^2 \quad \text{et} \quad k^2 = k_H^2 + k_3^2$$





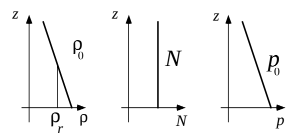
Avec la convention $\omega \geq 0$, la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega = N\,|\cos\theta| \;.$$

2.3 Champs oscillants des ondes de gravité internes

16 Les équations d'Euler incompressibles dans l'approximation de Boussinesq et linéarisées autour de l'état de base $\rho_0(z)$ s'écrivent

$$\begin{aligned} \rho_r \frac{\partial w}{\partial t} + g\,\tilde{\rho} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{N^2}{g}\,\rho_r\, w - \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} &= 0 \\ g\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} + \Delta \tilde{p} &= 0 \;. \end{aligned}$$



APM-INPT **thu-reladi (2003), O. Thual December 15, 2006**

17

On suppose que N est constant. Les ondes planes de la forme $(w, \tilde{\rho}, \tilde{p}) = (w_m, \rho_m, p_m) \exp(i\underline{k} \cdot \underline{x} - i\omega t)$ sont solutions ssi

$$\begin{pmatrix} -i\omega\,\rho_r & g & ik_3 \\ N^2\,\rho_r/g & i\omega & 0 \\ 0 & igk_3 & -k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_m \\ \rho_m \\ p_m \end{pmatrix} = 0\ .$$

On en déduit la relation de dispersion $\omega = N\,|\cos\theta(\underline{k})|$ ainsi que

$$(w_m, \rho_m, p_m) = w_m \left(1,\ i\omega \frac{k^2}{g\,k_H^2}\,\rho_r, -\omega \frac{k_3}{k_H^2}\rho_r\right)\ .$$

En choisissant w_m réel, une onde plane progressive s'écrit donc :

$$\begin{aligned} w &= w_m\ \cos(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega\,t) \\ \tilde{\rho}/\rho_r &= -w_m\ \frac{N}{g\,|\cos\theta|}\ \sin(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega\,t) \\ \tilde{p}/\rho_r &= -w_m \frac{N\,|\mathrm{tg}\,\theta|}{k} \cos(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega\,t)\ . \end{aligned}$$

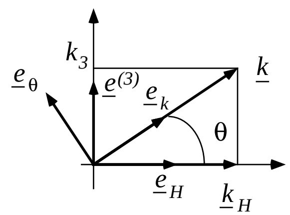
18

Les composantes horizontales de la vitesse sont données par

$$\rho_r\,\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \rho_r\,\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} = 0\ .$$

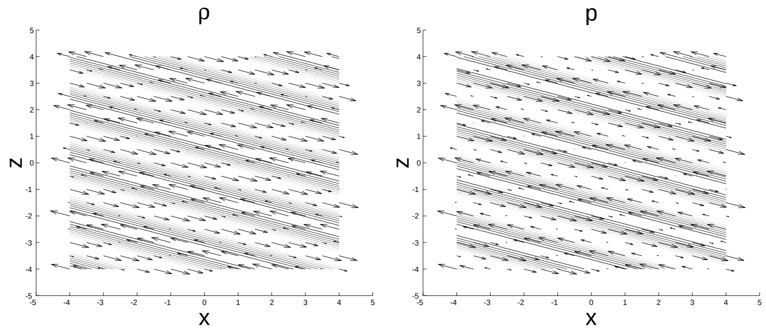
On en déduit $(u_m, v_m) = -w_m \frac{k_3}{k_H^2}(k_1, k_2)$ et, dans l'espace réel :

$$\underline{U} = (w_m/\cos\theta)\ \underline{e}_\theta\ \cos(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega\,t)$$



Les trajectoires des particules fluides sont donc situées sur des segments orthogonaux au vecteur d'onde.

19



Avec la convention $\omega > 0$, la relation de dispersion $\omega = N\,|\cos\theta(\underline{k})|$ décrit aussi bien une onde à droite qu'une onde à gauche

Vitesse de phase dans la direction de $\underline{k}$:

$$\underline{c}_\varphi(\underline{k}) = (N/k)|\cos\theta(\underline{k})|\ \underline{e}_k$$

20

3 Ondes de surface

Les oscillations de la surface libre séparant deux fluides de masses volumiques disctinctes (par exemple l'air et l'eau) sont dues aux forces de gravité.

On appelle souvent “ondes de gravité externes” ces ondes de surface par opposition aux ondes de gravité interne associées à une variation continue de masse volumique.

Comme pour les ondes de gravité internes, on peut considérer que le fluide est incompressible et parfait.

3.1 Équations d'Euler incompressibles à surface libre

3.2 Relation de dispersion des ondes de surface

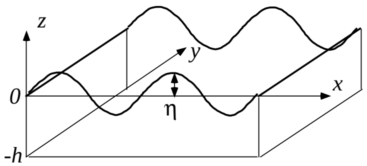
3.3 Champs oscillants des ondes de surface

APM-INPT **thu-reladi (2003), O. Thual December 15, 2006**

21

3.1 Éq. d'Euler incompressibles à surface libre

$$\mathrm{div}\ \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \rho_0\, \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\mathrm{grad}}\ p - \rho_0\ g\ \underline{e}^{(3)}$$



- Fond plat d'équation $z = -h$: $w = 0$
- Surface libre d'équation $F(\underline{x}, t) = z - \eta(x, y, t) = 0$:

$$\frac{dF}{dt} = w - \frac{d\eta}{dt} = 0 \qquad \text{et} \qquad p = p_a$$

En imposant $p = p_a$, on néglige la tension superficielle.

22

On suppose que l'écoulement est irrotationnel ($\underline{\Omega} = \underline{0}$) ce qui permet d'écrire le champ de vitesse sous la forme $\underline{U} = \underline{\mathrm{grad}}\ \phi$. On a :

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\mathrm{grad}} \left[\rho_0\, \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho_0\ (\underline{\mathrm{grad}}\ \phi)^2 + p + \rho_0\ g\ z\right] = 0\ .$$

avec $\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ et $p = p_a$ pour $z = \eta$ et $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ pour $z = -h$.

Comme ϕ est défini à une fonction$C(t)$ arbitraire près, on peut écrire

$$p = p_a - \rho_0\ g\ z - \rho_0\ \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho_0\ (\underline{\mathrm{grad}}\ \phi)^2\ .$$

La pression étant ainsi éliminée, on doit résoudre $\Delta\phi = 0$ dans tout le fluide avec les conditions aux limites

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\underline{\mathrm{grad}}\ \phi)^2 = -g\ \eta \qquad \text{pour } z = \eta\ \ .$$

et $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ pour $z = -h$.

23

3.2 Relation de dispersion des ondes de surface

On linéarise autour de l'état $\underline{U} = 0$, $\eta = 0$ et $p_0(z) = p_a - \rho_0\ g\ z$.

En posant $p = p_0 + \tilde{p}$, on doit résoudre l'équation de Laplace $\Delta\phi = 0$ dans le fluide avec les conditions aux limites :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\ \eta \qquad \text{en } z = 0$$

et $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ en $z = -h$

En éliminant η, on doit alors résoudre

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ en } z = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ en } z = -h\ .$$

Une fois le potentiel des vitesses ϕ connu, la pression s'en déduit :

$$\tilde{p} = -\rho_0\ \frac{\partial \phi}{\partial t}\ .$$

24

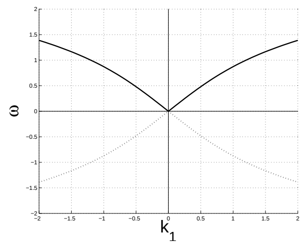
Solutions sous la forme $\phi = \Phi(z)\ \exp(ik_1\, x + ik_2\, y - i\omega\, t)$:

$$\Phi'' - k^2\ \Phi = 0 \quad \text{avec} \quad -\omega^2\ \Phi(0) + g\ \Phi'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi'(-h) = 0$$

Solutions de la forme $\Phi = \Phi_1\ \exp(k\ z) + \Phi_2\ \exp(-k\ z)$ avec :

$$(\omega^2 - g\ k)\, \Phi_1 + (\omega^2 + g\ k)\, \Phi_2 = 0 \quad \text{et} \quad e^{-k\,h}\ \Phi_1 - e^{k\,h}\ \Phi_2 = 0\ .$$

Relation de dispersion (convention $\omega \geq 0$) : $\omega = \sqrt{g\ k\ \tanh(k\ h)}$



APM-INPT **thu-reladi (2003), O. Thual December 15, 2006**

25

3.3 Champs oscillants des ondes de surface

Équations d'Euler incompressibles à surface libre linéarisées :

$$\Delta\phi = 0 \;, \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\,\eta = 0 \end{cases} \text{en } z = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ en } z = -h \;.$$

Solutions sous la forme $(\phi, \eta) = [\Phi(z), \eta_m]\, e^{i(k_1\,x + k_2\,y - \omega\,t)}$:

$$\Phi''(z) - k^2\;\Phi(z) = 0 \text{ avec } \quad \Phi'(-h) = 0$$

ce qui entraîne $\Phi(z) = \Phi_m\;\cos[k(z+h)]$ avec $\Phi_m \in \mathbb{C}$ arbitraire.

26

On cherche donc des ondes rectilignes sous la forme

$$(\phi, \eta) = (\Phi_m \cosh[k(z+h)], \eta_m)\;\exp(ik_1\,x + ik_2\,y - i\omega t)$$

qui doivent vérifier

$$\begin{pmatrix} k\sinh(kh) & i\omega \\ -i\omega\,\cosh(kh) & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_m \\ \eta_m \end{pmatrix} = 0 \;.$$

On en déduit la relation de dispersion $\omega = \sqrt{g\,k\;\tanh(kh)}$ ainsi que

$$(\Phi_m, \eta_m) = \Phi_m \left(1\;, i\frac{\omega}{g}\;\cosh(kh)\right) \;.$$

En choisissant ϕ_m réel :

$$\begin{aligned} \phi &= \Phi_m\;\cosh[k(z+h)]\;\cos(k_1\,x + k_2\,y - \omega t) \\ \eta_m &= -\Phi_m \frac{\omega}{g}\;\cosh(kh)\sin(k_1\,x + k_2\,y - \omega t) \;. \end{aligned}$$

27

L'expression des composantes complexes de la vitesse est alors

$$\begin{aligned} u_m &= i\;\Phi_m\;k_1\;\cosh[k(z+h)] \\ v_m &= i\;\Phi_m\;k_2\;\cosh[k(z+h)] \\ w_m &= \Phi_m\;k\;\sinh[k(z+h)] \end{aligned}$$

ce qui se traduit dans l'espace réel par les expressions

$$\begin{aligned} u &= -\Phi_m\;k_1\;\cosh[k(z+h)]\;\sin(k_1\,x + k_2\,y - \omega t) \\ v &= -\Phi_m\;k_2\;\cosh[k(z+h)]\;\sin(k_1\,x + k_2\,y - \omega t) \\ w &= \Phi_m\;k\;\sinh[k(z+h)]\;\cos(k_1\,x + k_2\,y - \omega t) \end{aligned}$$

La relation $\tilde{p} = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$ conduit à

$$p_m = \rho_0\,i\,\omega\,\Phi_m \cosh[k(z+h)]$$

ce qui se traduit dans l'espace réel par l'expression

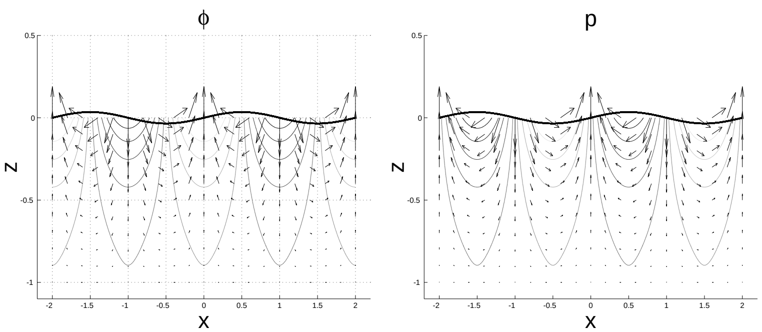
$$\tilde{p} = -\rho_0\,\omega\,\Phi_m \cosh[k(z+h)]\;\sin(k_1\,x + k_2\,y - \omega t)$$

28

Tracés graphique pour une onde progressive

$$\begin{aligned} \phi &= \Phi_m\;\cosh[k(z+h)]\;\cos(k_1\,x + k_2\,y - \omega t) \\ \eta &= -\Phi_m \frac{\omega}{g}\;\cosh(kh)\sin(k_1\,x + k_2\,y - \omega t) \;. \end{aligned}$$

$$\tilde{p} = -\rho_0\,\omega\,\Phi_m \cosh[k(z+h)]\;\sin(k_1\,x + k_2\,y - \omega t)$$

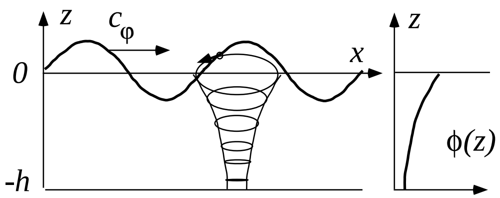


APM-INPT **thu-reladi (2003), O. Thual December 15, 2006**

29

Lorsque l'amplitude de l'onde est petite, on remplace $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ par leurs moyennes x_0, y_0 et z_0 dans $\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t)]$:

$$\begin{aligned} x(t; x_0, z_0) &= -\Phi_m \; (k_1/\omega) \; \cosh[k(z_0+h)] \; \cos(k_1 \, x_0 - \omega \, t) \\ z(t; x_0, z_0) &= -\Phi_m \; (k/\omega) \; \sinh[k(z_0+h)] \; \sin(k_1 \, x_0 - \omega \, t) \; . \end{aligned}$$



Ces trajectoires décrivent des ellipses de centres (x_0, z_0).

30

Conclusion

Relations de dispersion avec la c onvention $\omega \geq 0$

$$\omega = \Omega(k_1, k_2, k_3) = \Omega(\underline{k})$$

pour trois types d'écoulements de base de la mécanique des fluides.

- Ondes sonores : $\boxed{\omega = c\, k}$.
  Équations d'Euler compressibles
- Ondes de gravité internes : $\boxed{\omega = N \, |\cos\theta|}$.
  Équations d'Euler dans le cadre de l'approximation de Boussinesq
- Ondes de surface : $\boxed{\omega = \sqrt{g\; k\; \tanh(k\; h)}}$.
  Équations d'Euler incompressibles à surface libre.

31

FORMULAIRE ONDES SONORES

Équations d'Euler compressible :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \;\mathrm{div}\; \underline{U}\;, \qquad \rho\, \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\mathrm{grad}}\; p \quad \text{et} \quad \rho\, \frac{ds}{dt} = 0$$

accompagnées de la loi d'état $p = \mathcal{P}(\rho, s)$.

Relation de dispersion :

$$\omega = c\, k \quad \text{avec} \quad c^2 = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_s (\rho_0, s_0)\;.$$

Champ d'ondes :

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_m \; \cos(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega t) \\ \tilde{\rho} &= -\phi_m \; \rho_0 \; (\omega/c^2) \; \sin(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega t) \\ \tilde{p} &= -\phi_m \; \rho_0 \; \omega \; \sin(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega t) \end{aligned}$$

avec $\underline{U} = \underline{\mathrm{grad}}\; \phi$ qui s'écrit $\underline{U} = -\phi_m \, \underline{k} \; \sin(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega t)$.

32

ONDES DE GRAVITÉ INTERNE

Approximation de Boussinesq :

$$\mathrm{div}\; \underline{U} = 0\;, \quad \frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \frac{N^2}{g}\; \rho_r \; w \quad \text{et} \quad \rho_r\, \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\mathrm{grad}}\; \tilde{p} - \tilde{\rho}\; g\; \underline{e}^{(3)}$$

avec la fréquence de Brunt-Väisälä : $N(z) = \sqrt{-\frac{g}{\rho_r}\frac{d\rho_0(z)}{dz}}$.

Relation de dispersion :

$$\omega = N\, |\cos\theta| \quad \text{avec} \quad \theta = \arcsin\left(k_3/k_H\right)\;.$$

Champ d'ondes :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}/\rho_r &= -w_m \, \frac{N}{g\, |\cos\theta|} \; \sin(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega\, t) \\ \tilde{p}/\rho_r &= -w_m \frac{N\, |\mathrm{tg}\,\theta|}{k} \cos(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega\, t) \\ \underline{U} &= (w_m/\cos\theta)\; \underline{e}_\theta \; \cos(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega\, t)\;. \end{aligned}$$

33

ONDES DE SURFACE

Équations d'Euler incompressibles à surface libre :

$$\mathrm{div}\ \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \rho_0 \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\mathrm{grad}}\, p - \rho_0\, g\, \underline{e}^{(3)}$$

avec $w - \frac{d\eta}{dt} = 0$ et $p = p_a$ pour $z = \eta(x, y, t)$ et $w = 0$ pour $z = -h$.

Relation de dispersion :

$$\omega = \sqrt{g\ k\ \tanh(k\ h)}\ .$$

Champ d'ondes :

$$\begin{aligned} \phi &= \Phi_m\ \cosh[k(z+h)]\ \cos(k_1\, x + k_2\, y - \omega t) \\ \eta &= -\Phi_m \frac{\omega}{g}\ \cosh(kh) \sin(k_1\, x + k_2\, y - \omega t)\ . \end{aligned}$$

La vitesse $\underline{U} = \underline{\mathrm{grad}}\ \phi$ et la pression s'en déduisent.