CORRIGÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

Corrigé 0.1 Vitesse du son dans un gaz parfait

1)On peut écrire $p = B(s)\,\rho^\gamma$ où $B(s)$ ne dépend que de l'entropie. On en déduit que $c^2 = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_s = \gamma\, B(s)\,\rho^{\gamma-1} = \gamma\,\frac{p}{\rho} = \gamma\, r\,\Theta$. On en déduit $c = \sqrt{\gamma\, r\,\Theta}$. **2)**Pour $\Theta = 293°$ K, on a $c = \sqrt{1.4 \times \frac{8314}{29} \times 293}$ m/s ~ 340 m/s.

Corrigé 0.2 Ondes de surface capillaires

1)La tension de surface exercée sur un petit élement $d\mathcal{C}$ de courbe peut être schématisée par deux forces tangentes à $d\mathcal{C}$, situées à ses deux extrémités et dirigées vers l'extérieur de $d\mathcal{C}$. La résultante est donc une force dirigée dans la direction du centre de courbure de $d\mathcal{C}$. La pression du fluide situé dans cette direction est donc plus forte, afin de compenser cette force. **2)**On choisit $\sigma = x$ pour paramétrer la courbe $\underline{x}(x) = [x, \eta(x)]$ (on omet ici le temps t qui est fixé). On en déduit $\frac{d}{dx}\underline{x}(x) = \left[1, \frac{d\eta}{dx}\right]$ et donc $V(x) = \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2}$. On calcule $\frac{d^2}{dx^2}\underline{x}(x) = \left[0, \frac{d^2\eta}{dx^2}\right] = \frac{dV}{dx}\,\underline{\tau} + V\frac{ds}{dx}\,\frac{1}{|R|}\,\underline{n} = \frac{dV}{dx}\,\underline{\tau} + \frac{V^2}{|R|}\underline{n}$. En multipliant par $\underline{n} = \pm\frac{1}{V}\left[-\frac{d\eta}{dx}, 1\right]$ et comme $\underline{\tau}\cdot\underline{n} = 0$, on obtient $\frac{1}{|R|} = \pm\frac{1}{V^3}\frac{d^2\eta}{dx^2}$. En appliquant la convention de signe justifiée plus haut et en rétablissant la variable t, on obtient $\frac{1}{R(x,t)} = -\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\left[1 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$. **3)**Les équations linéarisées sont $\Delta\phi = 0$ avec la condition aux limites $\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$ en $z = -h$ et les conditions aux limites $\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial z}$ et $\frac{\partial\phi}{\partial t} + g\,\eta = \alpha\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$ en $z = 0$. On a en effet linéarisé l'expression de $\frac{1}{R}$ intervenant dans l'équation de Bernouilli. **4)**En considérant des ondes monochromatiques de la forme $\phi = \phi_m \exp(ik_1x - i\omega t)$, on voit qu'il suffit de remplacer g par $g + \alpha\,k_1^2$ dans la relation de dispersion usuelle des ondes de surfaces. On obtient donc la relation de dispersion $\omega = \Omega(k) = \sqrt{(g + \alpha\,k^2)\,k\,\mathrm{th}\,(k\,h)}$. **5)**Dans la limite $kh \gg 1$, la relation de dispersion devient $\omega = \Omega(k) = \sqrt{(g + \alpha\,k^2)\,k}$.

Corrigé 0.3 Eaux très profondes

1)En prenant le rotationnel de l'équation de quantité de mouvement on obtient $\frac{d}{dt}(\underline{\mathrm{rot}}\ \underline{U}) = \underline{\mathrm{rot}}\ \underline{U}\cdot\underline{\mathrm{grad}}\ \underline{U}$ (équation de l'étirement du tourbillon). Cette équation est compatible avec l'hypothèse $\underline{\mathrm{rot}}\ \underline{U} = \underline{0}$ et donc $\underline{U} = \underline{\mathrm{grad}}\ \phi$. Comme le fluide est inviscide, il n'y a pas de création de vorticité (rotationnel de la vitesse aux frontières). **2)**L'équation de quantité de mouvement s'écrit

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\underline{U} + \frac{1}{2}\,\rho_0\,\underline{\mathrm{grad}}\,\underline{U}^2 + \rho_0\,\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{U} \wedge \underline{U} = -\underline{\mathrm{grad}}\,p - \rho_0\,g\,\underline{e}^{(3)}\ . \qquad (1)$$

En utilisant $\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{U} = \underline{0}$ et $\underline{U} = \underline{\mathrm{grad}}\,\phi$, on a

$$\underline{\mathrm{grad}}\ \left[\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho_0(\underline{\mathrm{grad}}\ \phi)^2 + p + \rho_0\,g\,z\right] = 0\ . \qquad (2)$$

La quantité entre crochets, dont le gradient est nul, est constante. En notant $p_a + C_1(t)$ cette constante, on obtient la relation indiquée. **3)**La condition aux limites au fond s'écrit $\|\underline{\mathrm{grad}}\ \phi\| \to 0$ pour $z \to -\infty$, ce qui entraîne $\phi(\underline{x}, t) \to C_2(t)$. **4)**Comme le potentiel $\phi(\underline{x}, t)$ est défini à une constante près, on peut choisir $C_1(t) = 0$. **5)**L'élimination de la pression est obtenue en écrivant $p(\underline{x}, t) = p_a - \rho_0\,g\,z - \rho_0\,\frac{\partial \phi}{\partial t}(\underline{x}, t) - \frac{1}{2}\rho_0[\underline{\mathrm{grad}}\ \phi(\underline{x}, t)]^2$. Pour tout point, la condition $\mathrm{div}\ \underline{U} = 0$ s'écrit $\Delta\phi(\underline{x}, t) = 0$. Les conditions aux limites s'écrivent $\phi(x, y, -\infty, t) = 0$ pour le fond et, sur la surface libre d'équation $z = \eta(x, y, t)$, sous la forme

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(x, y, t) + \underline{\mathrm{grad}}_H\phi[x, y, \eta(x, y, t), t] \cdot \underline{\mathrm{grad}}_H\eta(x, y, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z}[x, y, \eta(x, y, t), t]$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial t}[x, y, \eta(x, y, t), t] + \frac{1}{2}\left\{\underline{\mathrm{grad}}\ \phi[x, y, \eta(x, y, t), t]\right\}^2 = -g\,\eta(x, y, t)$$

où $\underline{\mathrm{grad}}_H = \underline{e}^{(1)}\frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}^{(2)}\frac{\partial}{\partial y}$. **6)**Le système linéarisé en $(\phi,\ \eta)$ s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\ \eta = 0 \end{cases} \text{en } z = 0, \quad \Delta\phi = 0 \quad \text{et} \quad \phi(x, y, -\infty) = 0 \quad \text{au fond}\ . \qquad (3)$$

7)Le système est non borné en x et y et invariant par translation dans les directions horizontales. L'ensemble des $\exp(ik_1x + ik_2y)$ pour $(k_1, k_2) \in I\!R^2$ forme une base complète des fonctions de x et y. La forme en $\exp(-i\omega t)$ est justifiée par le fait que l'on cherche des ondes ; en effet, le système n'est ni dissipatif ni instable. Comme le système à résoudre est linéaire, on peut chercher des solutions complexes et prendre ensuite leur partie réelle pour trouver une solution réelle. Les fonctions à variables séparables sont denses dans l'ensemble des fonctions... **8)**En reportant la forme de ϕ dans $\Delta\phi = 0$ on obtient $\Phi''(z) = k^2\ \Phi(z)$. En utilisant la condition aux limites $\phi \to 0$ au fond, on obtient $\Phi(z) = \Phi_1\ \exp(kz)$ où Φ_1 est une constante complexe quelconque. **9)**En éliminant η, la condition aux limites en $z = 0$ s'écrit $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$, ce qui entraîne, pour la forme de solution particulière recherchée, que $-\omega^2\Phi(0) + g\Phi'(0) = 0$, c'est-à-dire $(-\omega^2 + g\ k)\Phi_1 = 0$. Il n'existe de solution $\Phi_1 \neq 0$ que si la relation $\omega^2 = g\ k$ est vérifiée. Avec la convention $\omega \geq 0$, on en déduit la relation de dispersion $\omega = \Omega(\underline{k}) = \sqrt{g\ k}$.

Champs d'ondes

10) En choisissant $\Phi_1 \in I\!\!R$ dans l'expression $\phi(x,y,z,t) = \Phi_1\, e^{kz+ik_1x+ik_2y-i\omega t}$ et en utilisant $\underline{U} = \mathrm{Re}(\underline{\mathrm{grad}}\ \phi)$ on obtient

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= -\Phi_1\, k_1\, e^{kz}\ \sin(k_1x+k_2y-\omega t) \\ v(x,y,z,t) &= -\Phi_1\, k_2\, e^{kz}\ \sin(k_1x+k_2y-\omega t) \\ w(x,y,z,t) &= \Phi_1\, k\, e^{kz}\ \cos(k_1x+k_2y-\omega t)\ . \end{aligned} \tag{4}$$

En utilisant $\eta = -\mathrm{Re}\left(\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$ en $z=0$, on obtient $\eta(x,y,t) = -\Phi_1\,\frac{\omega}{g}\ \sin(k_1x+k_2y-\omega t)$. **11)**Étant donné le vecteur unitaire $\underline{e}_k$ et le nombre d'onde k, on considère l'onde de vecteur d'onde $\underline{k} = k\,\underline{e}_k$ et l'onde de vecteur d'onde $-\underline{k}$. En imposant à ces deux ondes d'avoir la même amplitude et en les superposant on obtient une onde stationnaire dont les lignes de phase sont perpendiculaires à $\underline{e}_k$. **12)**Les trajectoires sont des cercles dans le plan $(\underline{k}, \underline{e}^{(3)})$ de rayon $\Phi_1\,\frac{k}{\omega}\,e^{kz} = \Phi_1\,\sqrt{\frac{k}{g}}\,e^{kz}$.

Corrigé 0.4 Eaux peu profondes en rotation

1)Les équations décrivent le mouvement d'un fluide parfait incompressible soumis à une rotation uniforme de vecteur rotation $\underline{\Omega}_0 = \frac{1}{2} f\ \underline{e}^{(3)}$. En effet, la vitesse absolue dans le repère fixe est reliée à la vitesse relative $\underline{U}$ par la relation $\underline{U}_a = \underline{U} + \underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x}$ si l'axe de rotation passe par l'origine $\underline{0}$. L'accélération absolue est alors $\underline{\Gamma}_a = \frac{d\underline{U}}{dt} + 2\,\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{U} + \underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x})$. En remarquant que $\underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x}) = -\frac{1}{2}\underline{\mathrm{grad}}\ \left[(\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x})^2\right]$ on obtient l'équation indiquée. Si l'axe de rotation passe par un autre point que $\underline{0}$, il suffit de rajouter une constante à la pression p. **2)**On a négligé la tension superficielle. L'absence de tensions visqueuses est déjà contenue dans l'hypothèse de fluide parfait. On néglige aussi le terme de pression centrifuge $-\frac{1}{8}\left(f\ \underline{e}^{(3)} \wedge \underline{x}\right)^2$ dans la condition aux limites sur la pression. Ceci revient à négliger la faible courbure du paraboloïde que forme la surface libre d'un fluide tournant. **3)**En intégrant l'équation de continuité sur la couche fluide et en utilisant la condition à la limite cinématique on obtient

$$\int_{-h}^{\eta} \mathrm{div}\ \underline{U}\ dz = (h+\eta)\ \mathrm{div_H}\ \underline{U}_H + \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \mathrm{div_H}\ [(h+\eta)\underline{U}_H] = 0. \tag{5}$$

L'équation d'évolution de $\underline{U}_H$ s'obtient trivialement en projetant l'équation de quantité de mouvement sur l'horizontale.

Relation de dispersion

4)Le système linéarisé autour de l'état de repos s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f\,v + g\,\frac{\partial\eta}{\partial x} \quad = \quad 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + f\,u + g\,\frac{\partial \eta}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + h\,\frac{\partial u}{\partial x} + h\,\frac{\partial v}{\partial y} &= 0\ . \end{aligned} \tag{6}$$

5)Les amplitudes complexes (u_m, v_m, η_m) sont solutions de

$$\begin{pmatrix} -i\omega & -f & ig\,k_1 \\ f & -i\omega & ig\,k_2 \\ ih\,k_1 & ih\,k_2 & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \\ \eta_m \end{pmatrix} = 0\ . \tag{7}$$

6)L'invariance par rotation des équations permet de se ramener à cette situation en changeant les axes de coordonnées. **7)**La relation de dispersion s'obtient en écrivant que le déterminant de la matrice du système linéaire est nul ce qui conduit, pour le cas $k_2 = 0$, aux deux relations $\Omega_n(k_1) = \sqrt{f^2 + g\,h\,k_1^2}$ et $\Omega_t(k_1) = 0$. **8)**Le cas général s'obtient en posant remplaçant k_1 par k. On obtient donc $\omega^2 = f^2 + g\,h\,k^2$ ou $\omega = 0$, ce qui conduit à $\Omega_n(k) = \sqrt{f^2 + g\,h\,k^2}$ et $\Omega_t(k) = 0$.

Champs d'ondes associés à Ω_n

9)Dans le cas où $k_2 = 0$, on obtient $(u_m, v_m, \eta_m) = \eta_m \left(\frac{\omega}{h\,k_1}, \frac{-i\,f}{h\,k_1}, 1\right)$. **10)**En choisissant η_m réel, l'expression d'une onde rectiligne progressive est donc

$$\begin{aligned} u &= (\eta_m/h\,k)\,[\omega\,\cos(k_1\,x - \omega\,t)] \\ v &= (\eta_m/h\,k)\,[f\,\sin(k_1\,x - \omega\,t)] \\ \eta &= \eta_m\,\cos(k_1\,x - \omega\,t)\ . \end{aligned} \tag{8}$$

11) On peut écrire $u_m\,\underline{e}^{(1)} + v_m\,\underline{e}^{(2)} = \frac{\eta_m}{h\,k}\,(\omega\,\underline{e}_k - i\,f\,\underline{e}_\theta)$ avec les notations $\underline{e}_k$ et $\underline{e}_\theta$. **12)**L'expression des champs réels dans le cas $k_2 = 0$ peut être mise facilement sous une forme intrinsèque faisant intervenir $\underline{e}_k$ et $\underline{e}_\theta$. Cette forme restera la même dans le cas général $k_2 \neq 0$. **13)**L'invariance par rotation des équations permet d'affirmer que cette expression est aussi valable pour le cas $k_2 \neq 0$. On en déduit la relation de polarisation dans le cas général qui s'écrit

$$(u_m, v_m, \eta_m) = \eta_m \left(\frac{\omega\,k_1 + i\,f\,k_2}{h\,k^2}, \frac{\omega\,k_2 - i\,f\,k_1,}{h\,k^2}, 1\right)\ . \tag{9}$$

14)L'expression intrinsèque associée est alors

$$\begin{aligned} (u, v) &= (\eta_m/h\,k)\,[\omega\,\underline{e}_k \cos\varphi(\underline{x}, t) + f\,\underline{e}_\theta \sin\varphi(\underline{x}, t)] \\ \eta &= \eta_m\,\cos\varphi(x, y, t)\ , \end{aligned} \tag{10}$$

avec $\varphi(\underline{x}, t) = \underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t$. On en déduit l'expression générale

$$u = (\eta_m/h\,k^2)\,[\omega\,k_1 \cos(k_1\,x + k_2\,y - \omega t) - f\,k_2 \sin(k_1\,x + k_2\,y - \omega t)]$$

$$
\begin{aligned}
v &= (\eta_m/h\,k^2)\,[\omega\,k_2\cos(k_1\,x+k_2\,y-\omega t)+f\,k_1\sin(k_1\,x+k_2\,y-\omega t)] \\
\eta &= \eta_m\,\cos(k_1\,x+k_2\,y-\omega t)\;. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

15) Les trajectoires des particules fluides sont des ellipses. **16)**Le vecteur vitesse décrit une ellipse dont les axes sont $\underline{e}_k$ et $\underline{e}_\theta$ en tournant dans le sens trigonométrique direct dans le plan horizontal, le vecteur vertical $\underline{e}^{(3)}$ indiquant l'orientation de ce plan. Les trajectoires sont des cercles pour $\omega = f$.

Champs d'ondes associés à Ω_t

17)L'expression générale des ondes associée $\omega = \Omega_t(k) = 0$ est

$$(u_m, v_m, \eta_m) = \eta_m\,[-i(g/f)k_2, i(g/f)k_1, 1]\;, \qquad (12)$$

18)L'expression intrinsèque qui en découle est $u_m\,\underline{e}^{(1)} + v_m\,\underline{e}^{(2)} = i\eta_m(g\,k/f)\underline{e}_\theta$. **19)**L'expression générale dans l'espace réel, en choisissant η_m réel, d'une "onde immobile" vérifiant $\omega = 0$ est donc

$$
\begin{aligned}
u &= \eta_m\,(g/f)k_2\sin(k_1\,x+k_2\,y) \\
v &= -\eta_m\,(g/f)k_1\sin(k_1\,x+k_2\,y) \\
\eta &= \eta_m\,\cos(k_1\,x+k_2\,y) \qquad (13)
\end{aligned}
$$

20)L'expression intrinsèque $u\,\underline{e}^{(1)} + v\,\underline{e}^{(2)} = -\eta_m(g\,k/f)\,\underline{e}_\theta\,\sin(\underline{k}\cdot\underline{x})$ indique que les trajectoires sont rectilignes et dans la direction $\underline{e}_\theta$. **21)**Le champ de vitesse est alors $u = -\frac{g}{f}\frac{\partial\eta}{\partial y}$ et $v = \frac{g}{f}\frac{\partial\eta}{\partial x}$. Les trajectoires parcourent alors les isolignes de la fonction $\eta(x,y)$ qui fait alors office de fonction de courant pour la vitesse.