

COURS ÉCRIT

1	Ondes sonores	1
2	Ondes de gravité internes	5
3	Ondes de surface	11

Introduction

On considère ici les modèles d'écoulement les plus simples permettant de mettre en évidence trois types d'ondes de la mécanique des fluides : les ondes sonores, les ondes de gravité internes et les ondes de surface.

La démarche est la même pour les trois exemples : on présente les équations du modèle, on linéarise autour d'un état de base et on établit la relation de dispersion $\omega = \Omega(\underline{k})$ des ondes planes qui relie leurs pulsations ω à leurs vecteurs d'onde \underline{k} .

La détermination d'une relation de dispersion conduit au calcul d'un spectre de valeurs propres, celui-ci étant continu dans le cas d'un domaine infini. La détermination des vecteurs propres correspondants, appelés "modes propres" dans le cas d'un spectre continu, conduit à la détermination de la forme des champs oscillants.

Pour les trois modèles fluides considérés (ondes sonores, ondes de gravité internes et ondes de surface), on rappelle les équations de base pour y appliquer une méthode systématique de calcul de la relation de dispersion. Cette méthode nous permet de donner l'expression des ondes planes solutions des trois modèles respectifs.

1 Ondes sonores

Il suffit de tendre l'oreille pour réaliser à quel point les ondes sonores font partie de notre univers. Ces ondes correspondent à des oscillations longitudinales des particules fluides. Ces ondes se propagent sur de grandes distances avant d'être amorties. On peut donc les décrire à l'aide d'un modèle de fluide parfait. La viscosité est donc négligeable et l'entropie des particules reste constante.

On dérive ici la relation de dispersion des ondes sonores et on décrit les champs responsables de ces oscillations. On remarque que ces ondes sont non dispersives avec une vitesse de propagation du son de l'ordre de 300 m/s dans l'air.

1.1 Équations d'Euler compressibles

Le modèle pertinent pour mettre en évidence les ondes sonores repose sur les équations d'Euler compressibles (conservation de la masse et de la quantité de mouvement, équation de bilan de l'énergie interne) :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{U}, \quad \rho \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\operatorname{grad}} p \quad \text{et} \quad \rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \underline{U} \quad (1)$$

accompagnées de deux lois d'état $p = \mathcal{P}(\rho, s)$ et $e = \mathcal{E}(\rho, s)$.

On a noté ρ la masse volumique, $\underline{U} = (u, v, w)$ la vitesse, p la pression, e l'énergie interne spécifique (par unité de masse) et s l'entropie spécifique. Ces champs dépendent des variables (\underline{x}, t) où $\underline{x} = (x, y, z)$ sont les variables d'espace et t la variable de temps. La dérivée particulaire est notée $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$.

Dans le cas général, les deux lois d'état $p = \mathcal{P}(\rho, s)$ et $e = \mathcal{E}(\rho, s)$ sont liées par la relation de Gibbs qui spécifie

$$\frac{de}{dt} = \Theta \frac{ds}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (2)$$

où Θ est la température. En reportant dans l'équation de bilan de l'énergie interne, on obtient que $\frac{ds}{dt} = 0$. L'entropie est donc constante le long des trajectoires (isentropie).

On a donc ainsi ramené le modèle aux équations

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{U}, \quad \rho \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\operatorname{grad}} p \quad \text{et} \quad \rho \frac{ds}{dt} = 0 \quad (3)$$

accompagnées de la loi d'état $p = \mathcal{P}(\rho, s)$. L'énergie interne e a été éliminée grâce à la relation de Gibbs.

1.2 Relation de dispersion des ondes sonores

On considère un état de base homogène $\rho = \rho_0$, $p = p_0$, $s = s_0$ et $\underline{U} = \underline{0}$ solution des équations, qui se réduisent donc à $p_0 = \mathcal{P}(\rho_0, s_0)$.

On pose alors $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$, $p = p_0 + \tilde{p}$ et $s = s_0 + \tilde{s}$. La linéarisation autour de l'état de base consiste à supposer que les perturbations $(\tilde{\rho}, \tilde{p}, \tilde{s}, \underline{U})$ sont petites et à négliger les termes d'ordre deux ($\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \tilde{\rho}$, $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{U}$, $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \tilde{s}$) dans les équations, qui s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} \underline{U}, \quad \rho_0 \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\underline{\text{grad}} \tilde{p} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

On suppose ici que l'entropie $s = s_0$ est uniforme à l'instant de départ. L'écoulement reste alors "homoentropique" pour tout temps, ce qui s'écrit $\tilde{s} = 0$.

La linéarisation de l'équation d'état $p = \mathcal{P}(\rho, s) = \mathcal{P}(\rho, s_0)$ s'écrit alors

$$\tilde{p} = c^2 \tilde{\rho} \quad \text{avec} \quad c^2 = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho} \right)_s (\rho_0, s_0). \quad (5)$$

On élimine la pression en prenant le rotationnel de l'équation de quantité de mouvement. Le rotationnel de la vitesse $\underline{\Omega} = \underline{\text{rot}} \underline{U}$ vérifie alors $\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial t} = \underline{0}$. On suppose alors que $\underline{\Omega} = \underline{0}$ à un instant donné. L'écoulement reste alors "irrotationnel", ce qui s'écrit $\underline{\Omega} = \underline{0}$. L'écoulement est donc potentiel et la vitesse s'écrit $\underline{U} = \underline{\text{grad}} \phi$ où ϕ , défini à une "constante" $C(t)$ près, est appelé le "potentiel des vitesses". On obtient alors le système

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\rho_0 \Delta \phi, \quad \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\tilde{p} \quad \text{et} \quad \tilde{p} = c^2 \tilde{\rho}. \quad (6)$$

La constante d'intégration de l'équation de Bernoulli, obtenue en intégrant l'équation de quantité de mouvement $\underline{\text{grad}} \left(\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \tilde{p} \right) = \underline{0}$, est ici choisie nulle en ajustant convenablement la fonction $C(t)$ "constante" en espace.

En éliminant $\tilde{\rho}$ et \tilde{p} dans ce système on obtient finalement

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \phi = 0. \quad (7)$$

Cette équation des ondes admet comme solutions des ondes planes $\phi = \phi_m \exp(i\mathbf{k} \cdot \underline{x} - i\omega t)$ vérifiant la relation de (non-)dispersion $\omega^2 = c^2 k^2$. Comme on ne s'intéresse qu'aux solutions réelles, une solution complexe caractérisée par (ϕ_m, ω, k) est équivalente à celle caractérisée par $(\phi_m^*, -\omega, -k)$. On peut donc adopter la convention qui consiste à se limiter aux pulsations

$\omega \geq 0$. Avec cette convention, la relation de dispersion de l'équation des ondes s'écrit :

$$\omega = c k . \quad (8)$$

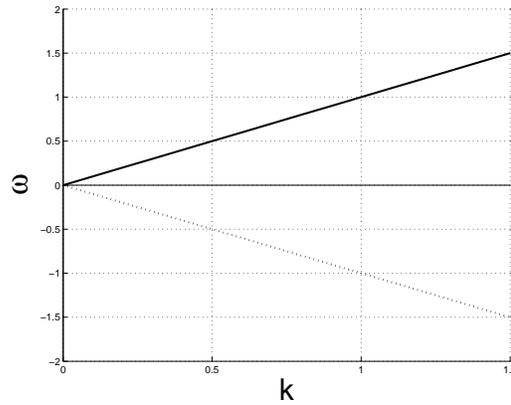


Figure 1: Relation de dispersion des ondes sonores. La convention $\omega \geq 0$ conduit à ignorer les courbes en pointillés.

1.3 Champs oscillants des ondes sonores

Les équations d'Euler compressibles linéarisées décrivant les ondes sonores s'écrivent

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \tilde{p} &= 0 \\ \rho_0 \Delta \phi + \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} &= 0 \\ c^2 \tilde{\rho} - \tilde{p} &= 0 . \end{aligned} \quad (9)$$

Une quatrième équation $\frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} = 0$ est découplée de ces trois équations.

Les ondes planes $(\phi, \tilde{\rho}, \tilde{p}) = (\phi_m, \rho_m, p_m) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$ doivent vérifier

$$\begin{pmatrix} -i\rho_0 \omega & 0 & 1 \\ -\rho_0 k^2 & -i\omega & 0 \\ 0 & c^2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_m \\ \rho_m \\ p_m \end{pmatrix} = 0 . \quad (10)$$

On en déduit la relation de dispersion $w^2 = c^2 k^2$ et la relation

$$(\phi_m, \rho_m, p_m) = \phi_m \left(1, i \frac{\rho_0 \omega}{c^2}, i\rho_0 \omega \right) . \quad (11)$$

En changeant l'origine de l'espace ou du temps, on peut choisir ϕ_m réel sans perte de généralité. L'expression d'une onde plane progressive est alors

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_m \cos(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t) \\ \tilde{\rho} &= -\phi_m \rho_0 (\omega/c^2) \sin(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t) \\ \tilde{p} &= -\phi_m \rho_0 \omega \sin(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)\end{aligned}\quad (12)$$

On en déduit l'expression de la vitesse $\underline{U} = \text{grad } \phi$ qui s'écrit :

$$\underline{U} = -\phi_m \underline{k} \sin(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t) . \quad (13)$$

On note que le vecteur vitesse \underline{U} est parallèle au vecteur d'onde \underline{k} . Les trajectoires des particules fluides sont situées sur des segments de droites parallèles à la direction de propagation de l'onde. Les ondes sonores sont donc des vibrations longitudinales. Les champs de pression, de masse volumique et de vitesse sont en phase : leurs maxima sont situés sur les mêmes surfaces.

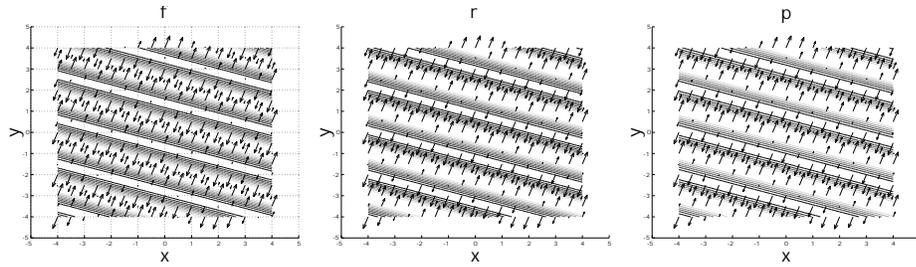


Figure 2: Onde sonore plane. Vecteurs vitesse et isovaleurs a) du potentiel ϕ , b) de la masse volumique ρ , c) des fluctuations de pression p .

Pour un vecteur d'onde \underline{k} donné, la vitesse de phase de l'onde est $c_{\varphi}(\underline{k}) = c \underline{e}_k(\underline{k})$ où $\underline{e}_k(\underline{k}) = \underline{k}/k$ désigne le vecteur unitaire orienté dans le sens de \underline{k} . Avec la convention $\omega \geq 0$, la vitesse de phase est toujours orientée dans le sens \underline{k} . Pour une direction donnée, on peut ainsi observer des ondes à gauche et des ondes à droite en orientant le vecteur \underline{k} de manière adéquate.

2 Ondes de gravité internes

Les ondes de gravité internes correspondent à des oscillations de particules dans un fluide stablement stratifié en densité dans la direction verticale. Une particule écartée de sa position d'équilibre sera plus lourde au-dessus de cette position et plus légère au-dessous, ce qui permet d'expliquer que la fréquence de ces oscillations dépend du champ de gravité et du gradient vertical de la masse volumique moyenne.

Comme ces oscillations de gravité sont beaucoup plus lentes que les oscillations de compressibilité, il est possible de “filtrer” les ondes sonores en construisant un modèle qui ne décrit que les ondes de gravité. C’est dans cette optique qu’est établie l’approximation de Boussinesq.

2.1 Approximation de Boussinesq

On considère tout d’abord les équations d’Euler écrites sous la forme

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{U}, \quad \rho \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\operatorname{grad}} p - \rho g \underline{e}^{(3)} \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dt} = 0 \quad (14)$$

avec l’équation d’état $p = \mathcal{P}(\rho, s)$ (l’équation de Gibbs a permis d’éliminer l’énergie interne e et de réduire à quatre le nombre d’équations).

On considère un fluide au repos ($\underline{U} = \underline{0}$) avec une stratification en densité $\rho_0(z)$. En présence d’une gravité $-g\underline{e}^{(3)}$, la pression (hydrostatique) $p_0(z)$ vérifie $\frac{d}{dz}p_0(z) = -\rho_0(z) g$ et l’entropie $s_0(z)$ découle de l’équation d’état $p_0 = \mathcal{P}(\rho_0, s_0)$. On note ρ_r une masse volumique de référence constante caractéristique du profil $\rho_0(z)$ sur le domaine étudié.

L’approximation de Boussinesq se décompose en deux étapes. La première étape consiste à remplacer l’équation d’état par la contrainte $\operatorname{div} \underline{U} = 0$. On considère que l’écoulement est incompressible. La pression n’est donc plus un paramètre thermodynamique (l’équation d’état n’est plus pertinente) mais devient, dans cette approximation, un paramètre dynamique (c’est un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d’incompressibilité). Le modèle devient donc

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \rho \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\operatorname{grad}} p - \rho g \underline{e}^{(3)}. \quad (15)$$

L’équation $\frac{ds}{dt} = 0$ est découplée du modèle et peut donc être ignorée.

La deuxième étape dépend du choix de l’état de base et de la masse volumique de référence ρ_r . En notant $\rho = \rho_0(z) + \tilde{\rho}$ et $p = p_0(z) + \tilde{p}$, cette étape consiste à écrire le système sous la forme :

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad \frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \frac{N^2}{g} \rho_r w \quad \text{et} \quad \rho_r \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\operatorname{grad}} \tilde{p} - \tilde{\rho} g \underline{e}^{(3)} \quad (16)$$

où $w = \underline{U} \cdot \underline{e}^{(3)}$ est la vitesse verticale et $N^2(z) = -\frac{g}{\rho_r} \frac{d\rho_0}{dz}$. La seule approximation effectuée a été de remplacer ρ par ρ_r dans le terme $\rho \frac{d\underline{U}}{dt}$ de l’équation de quantité de mouvement.

Dans le cas $\frac{d\rho_0}{dz} < 0$, N est appelée la fréquence de Brunt-Väisälä et s'écrit :

$$N(z) = \sqrt{-\frac{g}{\rho_r} \frac{d\rho_0(z)}{dz}} . \quad (17)$$

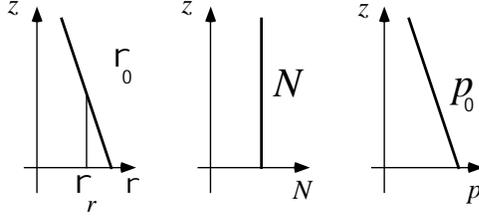


Figure 3: Profils $\rho_0(z)$, $N(z)$ et $p_0(z)$.

Enfin, il est courant de considérer N constant, ce qui conduit à un système invariant par toutes les translations d'espace.

2.2 Relation de dispersion des ondes de gravité internes

Le système linéarisé autour de l'état de base s'écrit

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 , \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{N^2}{g} \rho_r w \quad \text{et} \quad \rho_r \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \tilde{p} - \tilde{\rho} g \underline{e}^{(3)} . \quad (18)$$

On élimine la pression en prenant la divergence de l'équation de quantité de mouvement ce qui conduit au système

$$\Delta \tilde{p} = -g \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} , \quad \rho_r \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} - \tilde{\rho} g \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{N^2}{g} \rho_r w . \quad (19)$$

On élimine \tilde{p} à l'aide de la première équation, ce qui conduit à la relation

$$\rho_r \frac{\partial}{\partial t} \Delta w = g \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{\rho} - g \Delta \tilde{\rho} = -g \Delta_H \tilde{\rho} \quad (20)$$

en posant $\Delta_H = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. On élimine ensuite $\tilde{\rho}$ à l'aide de la troisième équation et on obtient finalement l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w + N^2 \Delta_H w = 0 . \quad (21)$$

Dans le cas général où $N(z)$ dépend de l'altitude z , les solutions de cette équation doivent être recherchées sous la forme $w = W(z)e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)}$.

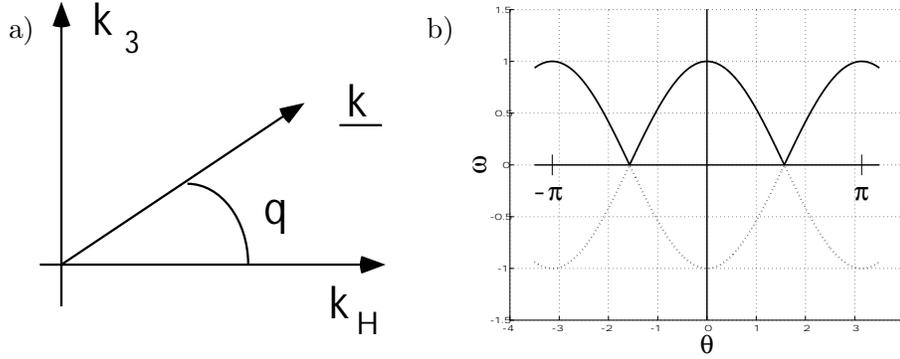


Figure 4: (a) Définition de θ , (b) Relation de dispersion des ondes internes.

Dans le cas où N ne dépend pas de z , le problème est invariant par toutes les translations d'espace et de temps et les solutions sont des ondes planes de la forme $w = w_m e^{i\underline{k}\cdot\underline{x} - i\omega t}$, à condition que la relation de dispersion suivante soit vérifiée :

$$\omega^2 = N^2 \frac{k_H^2}{k^2} \quad (22)$$

avec $k_H^2 = k_1^2 + k_2^2$ et $k^2 = k_H^2 + k_3^2$.

On définit l'angle $\theta(\underline{k})$ par la relation $\underline{k} = k(\cos \theta \underline{e}_H + \sin \theta \underline{e}^{(3)})$ avec $\underline{e}_H = \underline{k}_H/k_H$, $\underline{k}_H = k_1 \underline{e}^{(1)} + k_2 \underline{e}^{(2)}$ et $k_H^2 = k_1^2 + k_2^2$. Cette définition entraîne que $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et l'on peut écrire $\theta = \arcsin(k_3/k) = \arctg(k_3/k_H)$. Dans le cas 2D, on peut vouloir remplacer \underline{e}_H par $\underline{e}^{(1)}$ et définir $\theta \in [-\pi, \pi]$. Dans tous les cas, la relation de dispersion s'écrit $\omega^2 = N^2 \cos^2 \theta$, c'est-à-dire (avec la convention $\omega \geq 0$) :

$$\omega = N |\cos \theta| . \quad (23)$$

2.3 Champs oscillants des ondes internes

Les équations d'Euler incompressibles dans l'approximation de Boussinesq et linéarisées autour de l'état de base $\rho_0(z)$ s'écrivent

$$\begin{aligned} \rho_r \frac{\partial w}{\partial t} + g \tilde{\rho} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{N^2}{g} \rho_r w - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} &= 0 \\ g \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \Delta \tilde{p} &= 0 . \end{aligned} \quad (24)$$

On se restreint au cas particulier où N est constant. On peut alors considérer des ondes planes de la forme $(w, \tilde{\rho}, \tilde{p}) = (w_m, \rho_m, p_m) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$ qui doivent vérifier

$$\begin{pmatrix} -i\omega \rho_r & g & ik_3 \\ N^2 \rho_r/g & i\omega & 0 \\ 0 & igk_3 & -k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_m \\ \rho_m \\ p_m \end{pmatrix} = 0. \quad (25)$$

On en déduit la relation de dispersion $\omega^2 = N^2 k_H^2 / k^2 = N^2 \cos^2 \theta(\mathbf{k})$, c'est-à-dire $\omega = N |\cos \theta(\mathbf{k})|$ avec la convention $\omega \geq 0$, ainsi que la relation

$$(w_m, \rho_m, p_m) = w_m \left(1, i\omega \frac{k^2}{g k_H^2} \rho_r, -\omega \frac{k_3}{k_H^2} \rho_r \right). \quad (26)$$

En choisissant w_m réel, l'expression générale d'une onde plane progressive est donc

$$\begin{aligned} w &= w_m \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \\ \tilde{\rho}/\rho_r &= -w_m \frac{\omega k^2}{g k_H^2} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) = -w_m \frac{N}{g |\cos \theta|} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \\ \tilde{p}/\rho_r &= -w_m \frac{\omega k_3}{k_H^2} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) = -w_m \frac{N \sin \theta}{k |\cos \theta|} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t). \end{aligned} \quad (27)$$

Les composantes horizontales de la vitesse se déduisent des autres quantités en ajoutant les équations

$$\rho_r \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \rho_r \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} = 0. \quad (28)$$

On en déduit que pour une onde plane $(u, v) = (u_m, v_m) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ les amplitudes complexes sont données par $(u_m, v_m) = -w_m \frac{k_3}{k_H^2} (k_1, k_2)$. Dans l'espace réel on obtient alors

$$u = -w_m \frac{k_3 k_1}{k_H^2} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad \text{et} \quad v = -w_m \frac{k_3 k_2}{k_H^2} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t). \quad (29)$$

On note alors $\mathbf{k}_H = k_1 \mathbf{e}^{(1)} + k_2 \mathbf{e}^{(2)}$ le vecteur d'onde et $\mathbf{e}_H = \mathbf{k}_H / k_H$ le vecteur unitaire orienté dans la direction de \mathbf{k}_H . On peut alors écrire $\mathbf{k} = k(\cos \theta \mathbf{e}_H + \sin \theta \mathbf{e}^{(3)})$. On définit alors $\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_H + \cos \theta \mathbf{e}^{(3)}$ le vecteur unitaire normal à \mathbf{k} . Avec ces notations, le vecteur vitesse s'écrit donc

$$\underline{U} = (w_m / \cos \theta) \mathbf{e}_\theta \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t). \quad (30)$$

Les trajectoires des particules fluides sont donc situées sur des segments orthogonaux au vecteur d'onde.

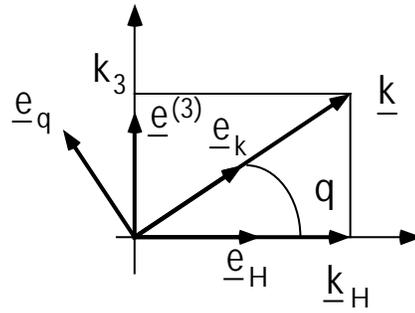


Figure 5: Vecteurs unitaires \underline{e}_H , $\underline{e}^{(3)}$, \underline{e}_k et \underline{e}_q .

Avec la convention $\omega > 0$, la relation de dispersion $\omega = N |\cos \theta(\underline{k})|$ décrit aussi bien une onde à droite par rapport à la direction \underline{e}_k dont la vitesse de propagation (vitesse de phase) $\underline{c}_\varphi(\underline{k}) = (N/k) |\cos \theta(\underline{k})| \underline{e}_k$ est orientée dans la direction de son vecteur d'onde $\underline{k} = k \underline{e}_k$ qu'une onde à gauche par rapport à cette même direction \underline{e}_k , de vitesse de phase $\underline{c}_\varphi(-\underline{k}) = -(N/k) |\cos \theta(-\underline{k})| \underline{e}_k$ et qui se propage donc dans la direction contraire de son vecteur d'onde $-\underline{k}$.

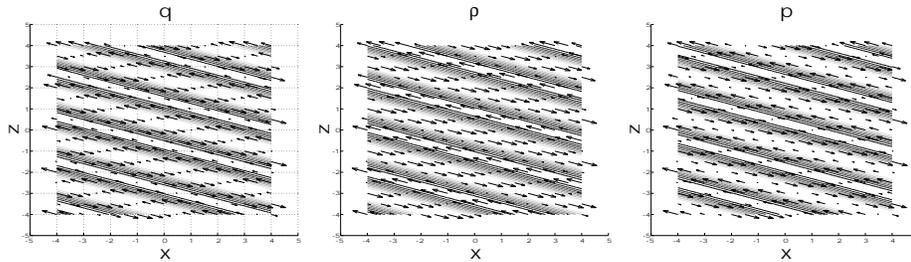


Figure 6: Onde de gravité interne plane. Vecteurs vitesse et isovaleurs a) de la vitesse verticale w , b) de la masse volumique ρ , c) des fluctuations de pression \tilde{p} .

3 Ondes de surface

Il suffit de regarder la surface d'un plan d'eau pour visualiser la notion d'ondes de surface. Les oscillations de la surface libre séparant deux fluides de masses volumiques distinctes (par exemple l'air et l'eau) sont dues aux forces de gravité. On appelle souvent "ondes de gravité externes" ces ondes de surfaces associées à une discontinuité de masse volumique, par opposition aux ondes de gravité interne qui sont associées à une variation continue de masse volumique.

Comme pour les ondes de gravité internes, on peut considérer que le fluide est incompressible et parfait.

3.1 Équations d'Euler incompressibles à surface libre

Le modèle utilisé pour décrire les ondes de surface repose sur les équations d'Euler incompressibles

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \rho_0 \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\operatorname{grad}} p - \rho_0 g \underline{e}^{(3)} \quad (31)$$

avec les conditions aux limites $\frac{dF}{dt} = w - \frac{d\eta}{dt} = 0$ et $p = p_a$ sur la surface libre d'équation $F(\underline{x}, t) = z - \eta(x, y, t) = 0$ et $w = 0$ sur le fond plat d'équation $z = -h$. L'élévation de la surface libre est donc η , la pression atmosphérique p_a est supposée constante et la profondeur de la couche fluide au repos est h .

En imposant la condition aux limites $p = p_a$, on néglige la tension superficielle qui aurait pour effet d'ajouter à p_a un terme $\gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ où γ est la tension de surface et R_1 et R_2 les deux rayons de courbure dans deux plans orthogonaux quelconques contenant la normale à la surface libre. Cet effet n'intervient qu'aux petites échelles (ondes capillaires).

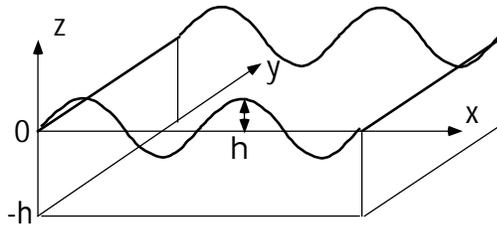


Figure 7: Géométrie d'un écoulement à surface libre

On suppose que l'écoulement est irrotationnel ($\underline{\Omega} = \operatorname{rot} \underline{U} = \underline{0}$), ce qui permet d'écrire le champ de vitesse sous la forme $\underline{U} = \underline{\operatorname{grad}} \phi$. Le système d'équations se met alors sous la forme

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\operatorname{grad}} \left[\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho_0 (\underline{\operatorname{grad}} \phi)^2 + p + \rho_0 g z \right] = \underline{0}. \quad (32)$$

avec les conditions aux limites $\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ et $p = p_a$ pour $z = \eta$ et $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ pour $z = -h$.

Comme ϕ est défini à une fonction du temps $C(t)$ arbitraire près, on peut choisir p_a comme constante d'intégration du gradient. On élimine alors la

pression grâce à la relation

$$p = p_a - \rho_0 g z - \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_0 (\text{grad } \phi)^2 . \quad (33)$$

La pression étant ainsi éliminée, on doit résoudre $\Delta \phi = 0$ dans tout le fluide avec les conditions aux limites

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad } \phi)^2 = -g \eta \quad \text{pour } z = \eta . \quad (34)$$

et $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ pour $z = -h$.

3.2 Relation de dispersion des ondes de surface

On linéarise autour de l'état de base $\underline{U} = 0$, $\eta = 0$ et $p_0(z) = p_a - \rho_0 g z$ en posant $p = p_0 + \tilde{p}$. La linéarisation conduit à négliger les termes non linéaires dans les équations mais aussi à remplacer les conditions aux limites sur la surface mobile d'équation $z = \eta(x, y, t)$ par des conditions aux limites sur la surface fixe d'équation $z = 0$. En effet, pour un champ quelconque $f(x, y, z, t)$ on peut écrire

$$f[x, y, \eta(x, y, t), t] = f(x, y, 0, t) [1 + O(\eta)] . \quad (35)$$

Le modèle est alors constitué de l'équation de Laplace $\Delta \phi = 0$ dans le fluide avec les conditions aux limites :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = -g \eta \quad \text{en } z = 0 \quad (36)$$

et $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ en $z = -h$

En éliminant η , on doit alors résoudre

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h . \quad (37)$$

Une fois le potentiel des vitesses ϕ connu, la pression s'en déduit à l'aide de la relation

$$\tilde{p} = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} . \quad (38)$$

On cherche des solutions sous la forme $\phi = \Phi(z) \exp(ik_1 x + ik_2 y - i\omega t)$. On note ici $k^2 = k_1^2 + k_2^2$. Le système devient alors

$$\Phi'' - k^2 \Phi = 0 \quad \text{avec} \quad -\omega^2 \Phi(0) + g \Phi'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi'(-h) = 0 . \quad (39)$$

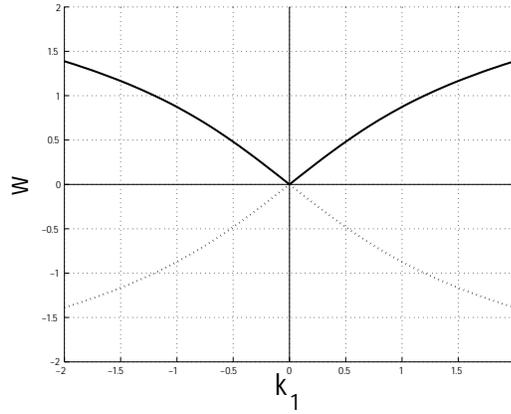


Figure 8: Relation de dispersion des ondes de surface.

Les solutions sont de la forme $\Phi = \Phi_1 \exp(kz) + \Phi_2 \exp(-kz)$ et on doit satisfaire

$$(\omega^2 - gk) \Phi_1 + (\omega^2 + gk) \Phi_2 = 0 \quad \text{et} \quad e^{-kh} \Phi_1 - e^{kh} \Phi_2 = 0. \quad (40)$$

Ce système linéaire admet des solutions non nulles lorsque son déterminant est nul, ce qui conduit à la relation de dispersion $\omega^2 = gk \tanh(kh)$, c'est-à-dire, avec la convention $\omega \geq 0$:

$$\omega = \sqrt{gk \tanh(kh)}. \quad (41)$$

La solution s'écrit alors $\Phi(z) = \Phi_m \cosh[k(z+h)]$. À titre d'exercice, on pourra vérifier que la recherche de solutions de la forme $\Phi(z) = A \cosh(kz) + B \sinh(kz)$ conduit encore plus rapidement au résultat.

On appelle "houle d'Airy", ou encore "houle de Stokes du premier ordre", les ondes linéaires et irrotationnelles ainsi obtenues.

3.3 Champs oscillants des ondes de surface

Les équations d'Euler incompressibles à surface libre linéarisées s'écrivent

$$\Delta\phi = 0, \quad \begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial\eta}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} + g\eta = 0 \end{cases} \text{ en } z = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \text{ en } z = -h. \quad (42)$$

Le problème étant invariant pour les translations horizontales, on cherche des solutions sous la forme $(\phi, \eta) = [\Phi(z), \eta_m] e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)}$. Le profil vertical $\Phi(z)$ est solution du problème linéaire

$$\Phi''(z) - k^2 \Phi(z) = 0 \quad \text{avec} \quad \Phi'(-h) = 0 \quad (43)$$

avec $k^2 = k_1^2 + k_2^2$ ce qui entraîne $\Phi(z) = \Phi_m \cosh[k(z+h)]$ où Φ_m est un amplitude complexe arbitraire.

On cherche donc des ondes rectilignes sous la forme

$$(\phi, \eta) = (\Phi_m \cosh[k(z+h)], \eta_m) \exp(ik_1 x + ik_2 y - i\omega t) \quad (44)$$

qui doivent vérifier

$$\begin{pmatrix} k \sinh(kh) & i\omega \\ -i\omega \cosh(kh) & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_m \\ \eta_m \end{pmatrix} = 0. \quad (45)$$

On en déduit la relation de dispersion $\omega^2 = g k \tanh(kh)$, et donc $\omega = \sqrt{g k \tanh(kh)}$ avec la convention $\omega > 0$, ainsi que la relation

$$(\Phi_m, \eta_m) = \Phi_m \left(1, i \frac{\omega}{g} \cosh(kh) \right). \quad (46)$$

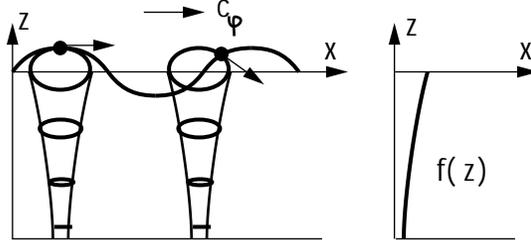


Figure 9: Profil de la surface libre, trajectoires des particules et profil $\Phi(z)$.

L'expression générale d'une onde rectiligne progressive est donc, en choisissant Φ_m réel,

$$\begin{aligned} \phi &= \Phi_m \cosh[k(z+h)] \cos(k_1 x + k_2 y - \omega t) \\ \eta &= -\Phi_m \frac{\omega}{g} \cosh(kh) \sin(k_1 x + k_2 y - \omega t). \end{aligned} \quad (47)$$

L'expression des composantes complexes de la vitesse est alors

$$\begin{aligned} u &= i \Phi_m k_1 \cosh[k(z+h)] e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)} \\ v &= i \Phi_m k_2 \cosh[k(z+h)] e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)} \\ w &= \Phi_m k \sinh[k(z+h)] e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)}, \end{aligned} \quad (48)$$

ce qui se traduit dans l'espace réel par les expressions

$$\begin{aligned} u &= -\Phi_m k_1 \cosh[k(z+h)] \sin(k_1 x + k_2 y - \omega t) \\ v &= -\Phi_m k_2 \cosh[k(z+h)] \sin(k_1 x + k_2 y - \omega t) \\ w &= \Phi_m k \sinh[k(z+h)] \cos(k_1 x + k_2 y - \omega t). \end{aligned} \quad (49)$$

La relation $\tilde{p} = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$ permet de calculer l'expression complexe $\tilde{p} = p_m \exp(ik_1 x + ik_2 y - i\omega t)$ de la pression avec

$$p_m = \rho_0 i \omega \Phi_m \cosh[k(z+h)] . \quad (50)$$

L'expression de la pression dans l'espace réel s'écrit alors

$$\tilde{p} = -\rho_0 \omega \Phi_m \cosh[k(z+h)] \sin(k_1 x + k_2 y - \omega t) . \quad (51)$$

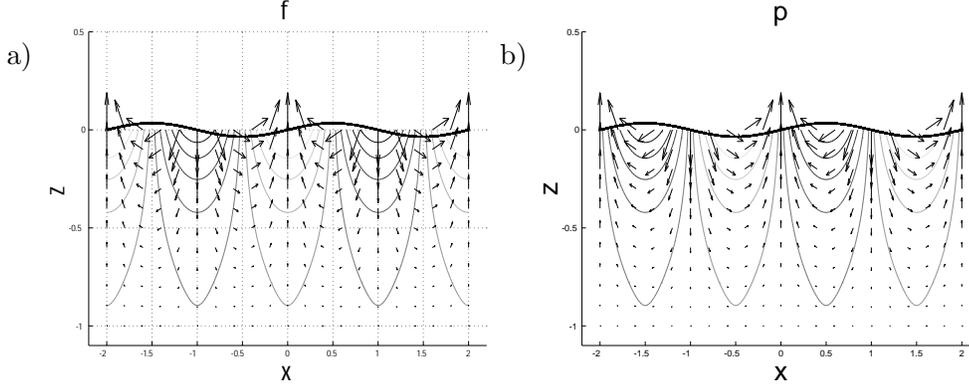


Figure 10: *Onde de surface. Vecteurs vitesse et isovaleurs a) du potentiel ϕ , b) des fluctuations de pression \tilde{p} .*

Pour une amplitude quelconque Φ_m , il n'existe pas de détermination analytique simple des trajectoires des particules fluides associées à ce champ de vitesse. Lorsque l'amplitude de l'onde est petite, on peut remplacer les positions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ par leurs moyennes x_0 , y_0 et z_0 dans l'expression du champ de vitesse qui intervient dans l'équation $\frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t), t]$. Cette hypothèse d'onde infinitésimale, compatible avec la démarche de linéarisation suivie pour l'étude des ondes, se traduit par la condition $\Phi_m k^2 / \omega \ll 1$ (il suffit d'adimensionnaliser l'amplitude Φ_m avec k et ω). Pour simplifier l'écriture, on peut supposer que $k_2 = 0$, ce qui revient à choisir $\underline{e}^{(1)}$ dans la direction de \underline{k}_H . L'équation des trajectoires dans un plan $y = y_0$, paramétrées par les positions (x_0, z_0) est alors

$$\begin{aligned} x(t; x_0, z_0) &= -\Phi_m (k/\omega) \cosh[k(z_0 + h)] \cos(k_1 x_0 - \omega t) \\ z(t; x_0, z_0) &= -\Phi_m (k/\omega) \sinh[k(z_0 + h)] \sin(k_1 x_0 - \omega t) . \end{aligned} \quad (52)$$

Ces trajectoires décrivent des ellipses de centres (x_0, z_0) .

La relation de dispersion $\omega = \sqrt{g k \tanh(kh)}$ décrit aussi bien des ondes à droite (vecteur d'onde \underline{k}) pour la direction \underline{e}_k que des ondes à gauche pour cette même direction (vecteur d'onde $-\underline{k}$). En déclarant alors le repère

($\underline{e}_k, \underline{e}^{(3)}$) direct, Les trajectoires des ondes à droite tournent dans le sens trigonométrique inverse tandis que celles des ondes à gauche tournent dans le sens trigonométrique direct.

Conclusion

Nous avons donc mis en évidence des relations de dispersion de la forme

$$\omega = \Omega(k_1, k_2, k_3) = \Omega(\underline{k}) \quad (53)$$

pour trois types d'écoulements de base de la mécanique des fluides.

La relation de dispersion des ondes sonores

$$\omega^2 = c^2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = c^2 k^2 \quad (54)$$

est obtenue à partir des équations d'Euler compressibles. On a supposé que l'écoulement était irrotationnel. Ces ondes sont non dispersives dans la mesure où la vitesse de phase $c_\varphi = \omega/k$ est constante. Avec la convention $\omega \geq 0$, cette relation de dispersion s'écrit $\boxed{\omega = c k}$.

La relation de dispersion des ondes de gravité internes

$$\omega^2 = N^2 \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} = N^2 \cos^2 \theta \quad (55)$$

est obtenue à partir des équations d'Euler dans le cadre de l'approximation de Boussinesq qui consiste à supposer que l'écoulement est incompressible mais que la masse volumique varie avec la verticale. Avec la convention $\omega \geq 0$, cette relation de dispersion s'écrit $\boxed{\omega = N |\cos \theta|}$.

La relation de dispersion des ondes de surface

$$\omega^2 = g \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \tanh \left[\sqrt{k_1^2 + k_2^2} h \right] = g k \tanh(k h) \quad (56)$$

est obtenue à des équations d'Euler incompressibles en présence d'une surface libre. Avec la convention $\omega \geq 0$, cette relation de dispersion s'écrit

$$\boxed{\omega = \sqrt{g k \tanh(k h)}}.$$