EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 0.1 Vitesse du son dans un gaz parfait

Les lois d'état d'un gaz parfait peuvent s'écrire $p = \rho\, r\, \Theta$ et $e = C_v\, \Theta$ où C_v est une constante et $r = R/M$ est le rapport entre la constante universelle $R = 8,314$ m^2 s^{-2} K^{-1} kg^{-1} des gaz parfaits et la masse molaire M (sans dimension) du gaz. On admettra que la relation de Gibbs $de = \Theta\, ds + \frac{p}{\rho^2}\, d\rho$, combinée à ces lois, entraîne l'expression $s = s_{\text{ref}} + C_v$ Ln $(p\, \rho^{-\gamma})$ de l'entropie, où s_{ref} est une valeur de référence et $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ avec $C_p = C_v + r$.

1) Montrer que la vitesse du son dans un gaz parfait ne dépend que de la température. Donner son expression en fonction de γ, r et Θ.
2) La masse molaire de l'air étant $M = 29$ g et en supposant $\gamma = 1.4$, calculer (même approximativement) la vitesse du son dans ce gaz à la température de 20° C.

Corrigé page **??**

EXERCICE 0.2 Ondes de surface capillaires

On veut calculer ici la relation de dispersion des ondes de surface en tenant compte de la tension superficielle. On se limite au cas bidimensionnel (indépendant de la direction horizontale y) dans un plan (x, z).

On suppose que la profondeur h est constante et on note $h+\eta(x,t)$ l'épaisseur totale de la couche fluide. À cause de la tension superficielle, la pression à la surface du fluide est égale à $p = p_a + \gamma/R$ où p_a est la pression atmosphérique (supposée constante) et R le rayon de courbure de la surface libre compté négativement pour le creux des vagues (forme convexe) et positivement pour les crêtes (forme concave). En notant $\alpha = \gamma/\rho$ où ρ est la masse volumique de la couche fluide, on a $\gamma = .074$ N/m entre l'air et l'eau pure à 20° C et $\alpha = 7.4\, 10^{-5}$ m^3 s^{-2}.

1) En considérant par exemple le cas où la surface déformée est au repos, justifier physiquement le signe du rayon de courbure intervenant dans la condition aux limites de pression. On nommera “rayon de courbure algébrique” le réel R ainsi défini pour le différencier du rayon de courbure habituel qui est égal à sa valeur absolue.
2) Étant donné une courbe $\underline{x}(\sigma)$ paramétrée par σ dans un plan (x, z), on note $\frac{dx}{d\sigma} = V(\sigma)\, \underline{\tau}(\sigma)$ le vecteur tangent avec $V > 0$ et $\|\underline{\tau}\| = 1$. La coordonnée curviligne s est définie par $\frac{ds}{d\sigma}(\sigma) = V(\sigma)$ et on note $\widetilde{V}(s) =$

$V(\sigma)$, $\underline{\widetilde{x}}(s) = \underline{x}(\sigma)$ et $\underline{\widetilde{\tau}}(s) = \underline{\tau}(\sigma)$. Le rayon de courbure $|R|$ est alors défini par la relation $\frac{d\underline{\widetilde{\tau}}}{ds}(s) = \frac{1}{|\widetilde{R}(s)|}\underline{\widetilde{n}}(s)$ avec $\|\underline{\widetilde{n}}\| = 1$ (on démontre de plus que $\underline{\tau} \cdot \underline{n} = 0$ en dérivant la relation $\underline{\tau}^2 = 1$). Montrer que le rayon de courbure algébrique au temps t de la courbe $z = \eta(x,t)$ qui décrit la surface libre de la couche fluide s'écrit $\frac{1}{R(x,t)} = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$.

3) On suppose que le fluide est parfait (inviscide) et incompressible et que l'écoulement est irrotationnel. On note alors $\underline{U} = \underline{\text{grad}}\ \phi$ le champ de vitesse. On s'intéresse aux petits mouvements autour de l'état de base $\underline{U} = \underline{0}$ et $\eta = 0$. Écrire les équations du mouvement linéarisées autour de cet état de base en tenant compte de la tension superficielle.
4) En déduire la relation de dispersion $\omega = \Omega(k_1)$ des ondes capillaires en adoptant la convention $\omega \geq 0$.
5) Que devient cette relation de dispersion dans le cadre de l'approximation des eaux très profondes.

Corrigé page **??**

PROBLÈME 0.3 Eaux très profondes

On s'intéresse aux ondes de surface en milieu infiniment profond. On utilise pour cela les équations d'Euler incompressibles

$$\text{div}\ \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \rho_0 \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\text{grad}}\ p - \rho_0\ g\ \underline{e}^{(3)} \tag{1}$$

et on note $\underline{U} = (u, v, w)$. Les conditions aux limites sont $\frac{dF}{dt} = w - \frac{d\eta}{dt} = 0$ et $p = p_a$ sur la surface libre d'équation $F(\underline{x}, t) = z - \eta(x, y, t) = 0$. L'élévation de la surface libre est donc η, la pression atmosphérique p_a est supposée constante. En allant vers le fond, les conditions aux limites sont écrites sous la forme $\|\underline{U}\| \to 0$ pour $z \to -\infty$.

Relation de dispersion

1) Montrer que l'on peut écrire $\frac{d}{dt}(\underline{\text{rot}}\ \underline{U}) = \underline{\text{rot}}\ \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}}\ \underline{U}$. On suppose désormais que l'on peut écrire $\underline{U}(\underline{x}, t) = \underline{\text{grad}}\ \phi(\underline{x}, t)$. Montrer que cette hypothèse est compatible avec les équations du problème.
2) Montrer que l'on peut alors écrire

$$p = p_a - \rho_0\ g\ z - \rho_0\ \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho_0\ (\underline{\text{grad}}\ \phi)^2 + C_1(t) \tag{2}$$

où $C_1(t)$ est une fonction arbitraire du temps qui ne dépend pas de $\underline{x}$.

3) Montrer que les conditions aux limites entraînent que $\phi(\underline{x},t) \to C_2(t)$ quand $z \to -\infty$ où $C_2(t)$ est une fonction arbitraire du temps qui ne dépend pas de $\underline{x}$.
4) Montrer que l'on peut choisir $C_1(t) = 0$. On suppose alors que l'on s'intéresse aux solutions telles que $C_2(t) = 0$.
5) Récapituler le système d'équations et ses conditions aux limites. Expliciter les opérateurs en s'inspirant des expressions suivantes : $\Delta\phi(\underline{x},t)$, $\frac{\partial\phi}{\partial z}\,[x,y,\eta(x,y,t),t]$, $\underline{\mathrm{grad}}_H\eta(x,y,t)$ avec $\underline{\mathrm{grad}}_H = \underline{e}^{(1)}\frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}^{(2)}\frac{\partial}{\partial y}$, etc.
6) Écrire le système d'équations linéarisées autour de l'état de base $\underline{U} = \underline{0}$ et $\eta = 0$ à l'aide des fonction $\phi(\underline{x},t)$ et $\eta(x,y,t)$ uniquement.
7) On cherche des solutions de la forme $\phi = \Phi(z)\ \exp(ik_1\,x + ik_2\,y - i\omega\,t)$. Justifier ce choix.
8) Montrer que $\Phi(z) = \Phi_1\ \exp(k\,z)$ où $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$.
9) En déduire la relations de dispersion $\omega = \Omega(\underline{k})$ des ondes de surface en milieu infiniment profond en notant $\underline{k} = (k_1,k_2)$ et en adoptant la convention $\omega \geq 0$.

Champs d'ondes

10) Expliciter les fonctions réelles $u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$, $w(x,y,z,t)$ et $\eta(x,y,t)$ associées à une onde de vecteur d'onde $\underline{k}$ et de pulsation ω.
11) Indiquer comment construire une onde stationnaire de nombre d'onde k dont les lignes de phase sont orthogonales à un vecteur unitaire $\underline{e}_k$ donné.
12) Décrire et dessiner les trajectoires en restant dans le cas où l'amplitude de l'onde est infinitésimale.

Corrigé page **??**

PROBLÈME 0.4 — Eaux peu profondes en rotation

On s'intéresse aux ondes de surface en milieu peu profond et en présence d'une rotation verticale. Ces ondes sont appelées “ondes d'inertie-gravité externes” en géophysique, et rendent compte, par exemple, des mouvements de la marée.

Modèle en eaux peu profondes

On considère un fluide à surface libre dans un bassin à fond plat et l'on suppose que son mouvement est décrit par les équations :

$$\begin{aligned} \rho_0\,\frac{d\underline{U}}{dt} + \rho_0\,f\,\underline{e}^{(3)}\wedge\underline{U} &= -\underline{\mathrm{grad}}\left[p - \frac{1}{8}\left(f\,\underline{e}^{(3)}\wedge\underline{x}\right)^2\right] - \rho_0\,g\,\underline{e}^{(3)} \\ \mathrm{div}\,\underline{U} &= 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

On note η l'élévation de la surface libre, p_a la pression atmosphérique supposée constante et h la profondeur de la couche fluide au repos. On note $P = p - \frac{1}{8}\left(f\,\underline{e}^{(3)} \wedge \underline{x}\right)^2$ la pression généralisée. On suppose que les conditions aux limites s'écrivent $\frac{dF}{dt} = w - \frac{d\eta}{dt} = 0$ et $P = p_a$ sur la surface libre d'équation $F(\underline{x}, t) = z - \eta(x, y, t) = 0$ et $w = 0$ pour $z = -h$.

1) Décrire brièvement l'écoulement modélisé par ces équations. On notera $\Omega_0 = f/2$ et $\underline{\Omega}_0 = \Omega_0 \underline{e}^{(3)}$.
2) Quel est ou quels sont le(s) phénomène(s) physique(s) négligé(s) dans les conditions aux limites ?

On suppose que la profondeur est suffisamment petite pour pouvoir écrire

$$\underline{U} = \underline{U}_H(x, y, t) + w\,\underline{e}^{(3)} \quad et \quad P = p_a - \rho_0\, g\,(z - \eta)\ . \tag{4}$$

La partie horizontale $\underline{U}_H = u\,\underline{e}^{(1)} + v\,\underline{e}^{(2)}$ du champ de vitesse ne varie donc pas avec la verticale et la pression reste hydrostatique. La vitesse verticale w n'est alors plus déterminée par son équation d'évolution, qui n'est plus pertinente, mais uniquement par l'équation de continuité et la condition aux limites du fond (approximation hydrostatique).

3) En intégrant l'équation de continuité sur la verticale, montrer que le système d'équations pour $\underline{U}_H$ et η s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\underline{U}_H + \underline{U}_H \cdot \underline{\mathrm{grad}}_H \underline{U}_H + f\ \underline{e}^{(3)} \wedge \underline{U}_H &= -g\ \underline{\mathrm{grad}}_H \eta \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathrm{div_H}\left[(h+\eta)\underline{U}_H\right] &= 0\ , \end{aligned} \tag{5}$$

avec les notations $\mathrm{div_H}\ \underline{U}_H = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\underline{\mathrm{grad}}_H \eta = \frac{\partial \eta}{\partial x}\ \underline{e}^{(1)} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\ \underline{e}^{(2)}$.

Relation de dispersion

On considère l'état de base $(u, v, \eta) = (0, 0, 0)$.

4) Écrire le système linéarisé autour de cet état de base.
5) On cherche des solutions de ce système sous la forme d'ondes planes $(u, v, \eta) = (u_m, v_m, \eta_m) \exp(ik_1\, x + ik_2\, y - i\omega\, t)$. Écrire le système linéaire vérifié par les amplitudes complexes (u_m, v_m, η_m).
6) Montrer que l'on peut supposer $k_2 = 0$ sans perte de généralité.
7) En déduire que la relation de dispersion des ondes d'inertie-gravité externes est composée de deux relations que l'on explicitera dans le cas $k_2 = 0$.
8) En notant $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ dans le cas général $k_2 \neq 0$, en déduire les deux relations de dispersion en les écrivant sous la forme $\omega = \Omega_n(k)$ (*n*on triviale) et $\omega = \Omega_t(k)$, la dernière étant *t*riviale.

Champs d'ondes associés à Ω_n

On examine tout d'abord les champs d'ondes associés à la relation de dispersion non triviale notée $\omega = \Omega_n(k)$. Les notations $\underline{e}_k = (k_1/k, k_2/k)$ et $\underline{e}_\theta = (-k_2/k, k_1/k)$ désignent deux vecteurs unitaires respectivement parallèles et orthogonaux au vecteur d'onde $\underline{k} = k_1\, \underline{e}^{(1)} + k_2\, \underline{e}^{(2)}$.

9) Dans le cas où $k_2 = 0$, exprimer la relation de polarisation sous la forme

$$(u_m, v_m, \eta_m) = \eta_m\,(A, B, 1)\ , \tag{6}$$

où A et B sont des amplitudes complexes que l'on explicitera.

10) En déduire une expression des champs réels $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ et $\eta(x, y, t)$ d'une onde plane monochromatique dans le cas $k_2 = 0$ en choisissant η_m réel.

11) Toujours dans le cas $k_2 = 0$, écrire

$$u_m\, \underline{e}^{(1)} + v_m\, \underline{e}^{(2)} = A'\underline{e}_k + B'\underline{e}_\theta \tag{7}$$

où A' et B' sont des amplitudes complexes que l'on explicitera.

12) Montrer que l'on peut alors écrire

$$\begin{aligned} u\, \underline{e}^{(1)} + v\, \underline{e}^{(2)} &= (\eta_m/h\,k)\,[\omega\, \underline{e}_k \cos\varphi(\underline{x}, t) + f\, \underline{e}_\theta \sin\varphi(\underline{x}, t)] \\ \eta &= \eta_m\, \cos\varphi(\underline{x}, t)\ , \end{aligned} \tag{8}$$

avec $\varphi(\underline{x}, t) = \underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t$ et η_m réel.

13) Généraliser les expressions des amplitudes A et B au cas $k_2 \neq 0$.

14) Donner l'expression des champs réels $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ et $\eta(x, y, t)$ d'une onde plane monochromatique dans le cas général $k_2 \neq 0$.

15) En supposant que l'amplitude de l'onde est petite, décrire les trajectoires des particules fluides associées à une onde plane monochromatique.

16) Montrer que le vecteur vitesse (u, v) de l'onde décrit une ellipse. Faire un dessin, même schématique, en indiquant dans quel sens le vecteur vitesse parcourt l'ellipse. Dans quel cas les vecteurs vitesses décrivent-ils des cerles ?

Champs d'ondes associés à Ω_t

On examine maintenant la relation de polarisation associée à la relation triviale $\omega = \Omega_t(k)$.

17) Exprimer la relation de polarisation sous la forme

$$(u_m, v_m, \eta_m) = \eta_m\,(A, B, 1) \tag{9}$$

où A et B sont des amplitudes complexes que l'on explicitera.

18) En déduire l'expression intrinsèque

$$u_m\, \underline{e}^{(1)} + v_m\, \underline{e}^{(2)} = A' \underline{e}_k + B' \underline{e}_\theta \tag{10}$$

où A' et B' sont des amplitudes complexes que l'on explicitera.

19) En déduire l'expression générale des champs (u, v, η) dans l'espace réel en choisissant η_m réel.

20) Montrer que l'on peut alors écrire $u\, \underline{e}^{(1)} + v\, \underline{e}^{(2)} = -\eta_m \frac{g\,k}{f}\ \underline{e}_\theta\ \sin(\underline{k} \cdot \underline{x})$. En déduire que les trajectoires sont rectilignes.

21) Plus généralement, le choix d'une fonction quelconque $\eta(x, y)$ indépendante du temps définit un champ de vitesse stationnaire $u(x, y)\ \underline{e}^{(1)} + v(x, y)\ \underline{e}^{(2)}$ tels que (u, v, η) soit solution des équations. Donner l'expression de ce champ de vitesse en fonction de η. On parle alors d'équilibre géostrophique.

Corrigé page **??**