Article Pédagogique Multimedia

O. Thual, APM-INPT **thu-advsca** *(2003)*

Advection d'un scalaire et caractéristiques

Objectif : exposer la résolution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho, x, t)\, \frac{\partial \rho}{\partial x} = f(\rho, x, t)$$

Première étape pour la méthode des caractéristiques

1 Dérivée le long de courbes

2 Résolution générale de l'équation d'advection

3 Résolution de cas particuliers

1 Dérivée le long de courbes

On définit ici la dérivée d'un champ $\rho(x,t)$ le long d'une courbe $\mathcal{L}$ du plan (x,t) d'équation $x = x_{\mathcal{L}}(t)$.

Difficultés de notations : $\rho^{(L)}(a,t) = \rho[x_{\mathcal{L}}(t),t]$ avec $a = x_{\mathcal{L}}(0)$,
$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{L}} = \frac{\partial\rho}{\partial t}^{(L)} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + c_{\mathcal{L}}\frac{\partial\rho}{\partial x}$ avec $c_{\mathcal{L}} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{L}} = \dot{x}_{\mathcal{L}}$, etc...
Famille de courbes $\mathcal{L}_a$ paramétrée par a, et analogie avec la dérivée particulaire d'un mouvement 1D

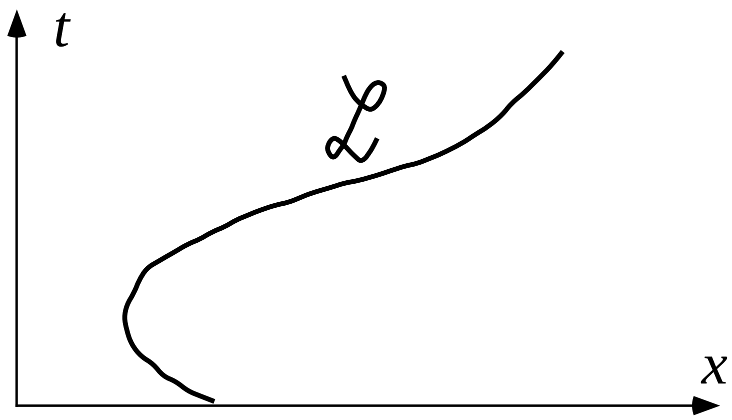
1.1 Courbe à vitesse bornée

1.2 Dérivée d'un champ le long d'une courbe

1.3 Famille de courbes à vitesses bornées

1.4 Représentation lagrangienne pour le mouvement 1D

1.1 Courbe à vitesse bornée



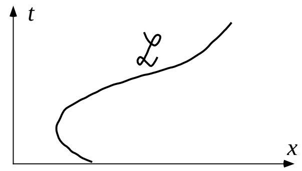
Courbe $\mathcal{L}$ "à vitesse bornée" d'équation : $x = x_{\mathcal{L}}(t)$

On définit sa "vitesse" par l'inverse de la pente dans le plan (x, t) :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{L}}(t) = \dot{x}_{\mathcal{L}}(t) \qquad \text{ou encore} \qquad c_{\mathcal{L}}(t) = \dot{x}_{\mathcal{L}}(t) \ .$$

Tant que la vitesse reste bornée, cette pente ne s'annule pas.

1.2 Dérivée d'un champ le long d'une courbe



On appelle "dérivée de ρ le long de $\mathcal{L}$" la quantité

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{L}}(t) = \left[\frac{\partial}{\partial t} + c_{\mathcal{L}}(t)\,\frac{\partial}{\partial x}\right]\rho\left[x_{\mathcal{L}}(t), t\right]$$

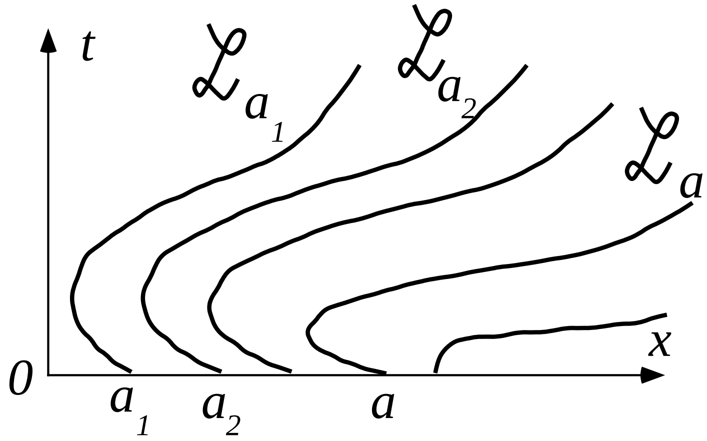
avec $c_{\mathcal{L}}(t) = \dot{x}_{\mathcal{L}}(t)$.

En notant $\rho_{\mathcal{L}}(t) = \rho\left[x_{\mathcal{L}}(t), t\right]$, on a :

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{L}} = \dot{\rho}_{\mathcal{L}}$$

NB : la notation $\left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathcal{L}}$ coïncide avec la précédente notation

1.3 Famille de courbes à vitesses bornées



Les fonctions $x_{\mathcal{L}_a}(t)$ décrivant les courbes $\mathcal{L}_a$ définissent $X(a,t)$ par

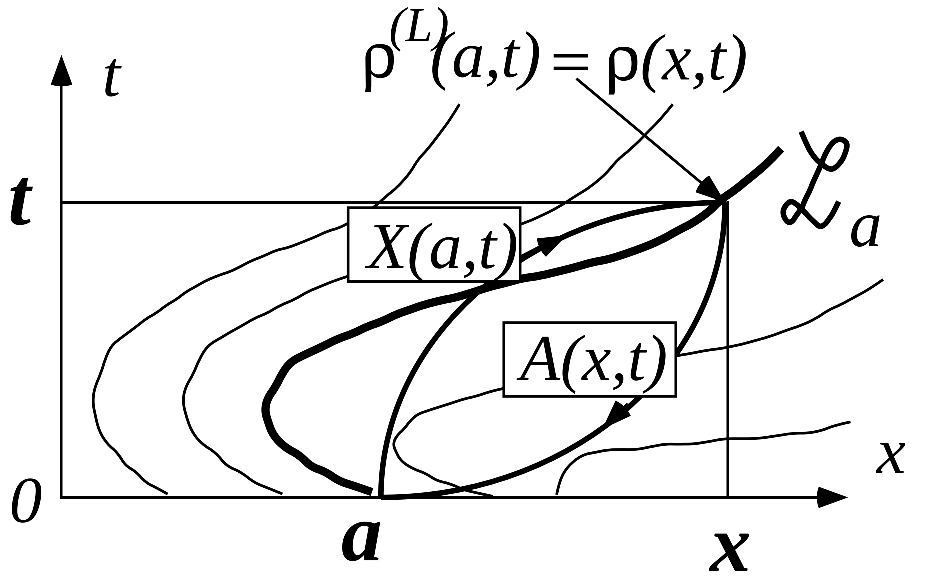
$$x_{\mathcal{L}_a}(t) = X(a,t) \; .$$

"Mouvement 1D" de trajectoires $\mathcal{L}_a$ avec $c_{\mathcal{L}_a} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{L}_a} = \frac{\partial X}{\partial t}(a,t)$.

Lorsque les courbes $\mathcal{L}_a$ ne se coupent pas, mouvement inverse :

$$a = A(x,t)$$

1.4 Représentation lagrangienne pour le mouvement 1D



Étant donné un champ $\rho(x,t)$ on peut définir $\rho^{(L)}(a,t)$ par

$$\rho^{(L)}(a,t) = \rho_{\mathcal{L}_a}(t) = \rho\left[X(a,t),t\right] \Longleftrightarrow \rho(x,t) = \rho^{(L)}\left[A(x,t),t\right] \ .$$

Représentation eulérienne $\rho(x,t)$ et dérivée particulaire $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{L}_a}$

2 Résolution générale de l'équation d'advection

On montre ici que la résolution de l'équation d'advection se ramène à la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires.

Ce système définit une famille de courbes $\mathcal{C}$ que l'on nomme "courbes caractéristiques". Dans le cas particulier où $f = 0$, la quantité ρ est invariante le long de ces courbes (invariant de Riemann).

2.1 Construction des solutions avec une famille de courbes

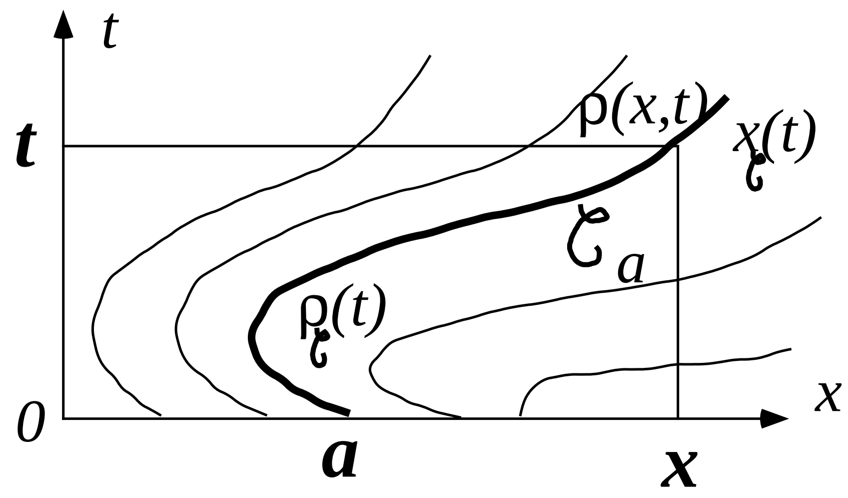
Équation aux dérivées partielles (EDP)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho, x, t)\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = f(\rho, x, t)\ .$$

Système d'équations différentielles ordinaires (EDO) :

$$\begin{cases} \dot{x}_{\mathcal{C}}(t) & = c\,(\rho_{\mathcal{C}}, x_{\mathcal{C}}, t) \\ \dot{\rho}_{\mathcal{C}}(t) & = f\,(\rho_{\mathcal{C}}, x_{\mathcal{C}}, t) \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{C}} & = c\,(\rho, x, t) \\ \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{C}} & = f\,(\rho, x, t) \end{cases}$$

Résolution de l'équation d'advection par la recherche d'une famille de courbes $\mathcal{C}$ d'équations $x = x_{\mathcal{C}}(t)$ et d'une famille de fonctions $\rho_{\mathcal{C}}(t)$



Solutions $[x_{\mathcal{C}_a}(t), \rho_{\mathcal{C}_a}(t)]$ et courbes $\mathcal{C}_a$ solutions de l'ODE.

Le mouvement 1D définit par la famille $\mathcal{C}_a$ permet de définir :

$$\rho(x,t) = \rho^{(L)}\left[A(x,t), t\right] = \rho_{\mathcal{C}_{A(x,t)}}(t) \; .$$

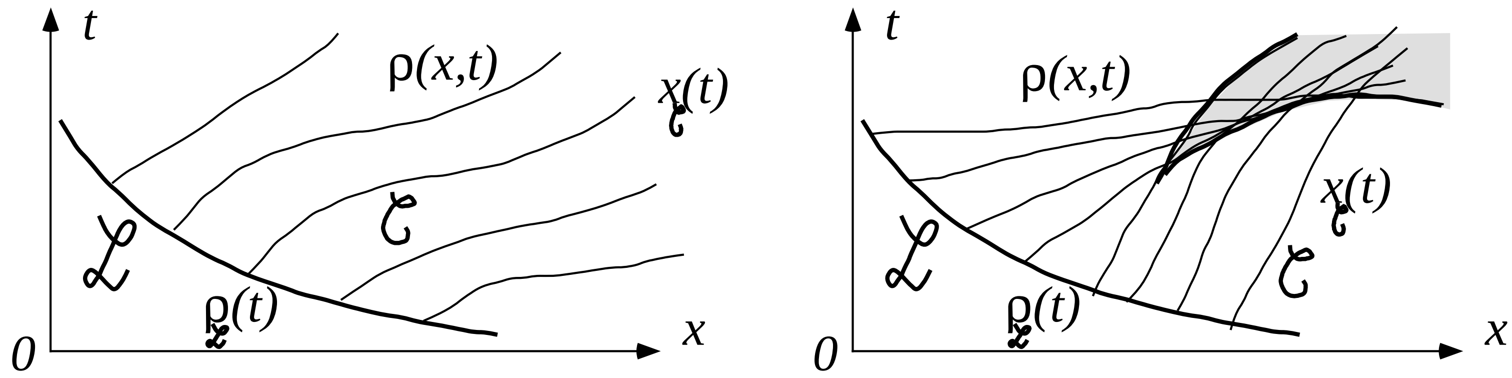
qui est alors solution de l'équation d'advection (EDP) :

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{C}}(x,t) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + c\left[\rho(x,t), x, t\right]\, \frac{\partial \rho}{\partial x}(x,t) = f(\rho, x, t)$$

2.2 Méthode des caractéristiques

Condition initiale de l'EDP : $\rho(x,0) = \rho_0(x)$

Condition initiale des EDO : $x(0) = a$ et $\rho(0) = \rho_0(a)$



Solutions EDP et EDOs équivalentes dans la région du plan (x,t) où les courbes caractéristiques ne se coupent pas.

C.I. plus générale de l'EDP : $\rho(x,t) = \rho_{\mathcal{L}}(t)$ connu sur une courbe $\mathcal{L}$

Les courbes caractéristiques "propagent" l'information dans le plan

2.3 Point de vue du changement de variable

Passage de (x,t) à (a,τ) à l'aide des relations

$$\left\{\begin{array}{lcc} da & = & dx - c[\rho(x,t),x,t]\; dt \\ d\tau & = & dt \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial A}{\partial x}(x,t) = 1 \\ \frac{\partial A}{\partial t}(x,t) = -c[\rho(x,t),x,t] \end{array}\right.$$

qui conduisent à des relations de la forme

$$\left\{\begin{array}{lcc} a & = & A(x,t) \\ \tau & = & t \end{array}\right. \quad \text{ou bien} \quad \left\{\begin{array}{lcc} x & = & X(a,\tau) \\ t & = & \tau \end{array}\right.$$

Opérateurs $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ en fonction de $\left(\frac{\partial}{\partial a}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right)$ en transposant

$$\begin{pmatrix} da \\ d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial a} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \end{pmatrix} .$$

En notant $\rho^{(L)}(a,\tau)$ l'expression du champ $\rho(x,t)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\rho = f(\rho,x,t) \Longleftrightarrow \frac{\partial \rho^{(L)}}{\partial \tau}(a,\tau) = f\left[\rho^{(L)}(a,\tau), X(a,\tau), \tau\right]$$

On peut exprimer le changement de variable sous la forme

$$\left\{\begin{array}{lcc} dx & = & da + c\,d\tau \\ dt & = & d\tau \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial X}{\partial a}(a,\tau) = 1 \\ \frac{\partial X}{\partial \tau}(a,\tau) = c\left[\rho^{(L)}(a,\tau), X(a,\tau), \tau\right] \end{array}\right.$$

On a donc ramené l'EDP au système d'EDO :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial X}{\partial \tau}(a,\tau) & = & c\left[\rho^{(L)}(a,\tau), X(a,\tau), \tau\right] \\ \frac{\partial \rho^{(L)}}{\partial \tau}(a,\tau) & = & f\left[\rho^{(L)}(a,\tau), X(a,\tau), \tau\right] \end{array}\right.$$

De manière condensée et avec des abus de notations :

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{C}} = f(\rho,x,t) \quad \text{sur la courbe } \mathcal{C} \text{ d'équation} \quad \frac{dx}{dt} = c(\rho,x,t)\ .$$

2.4 Point de vue du système dynamique

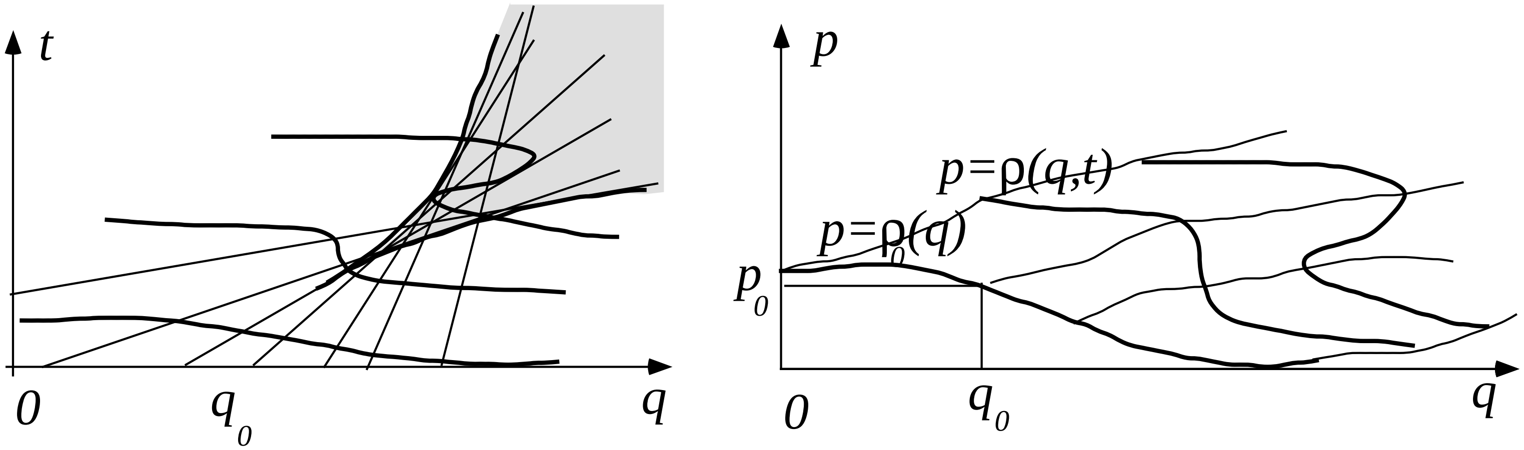
La méthode des caractéristiques conduit à la résolution des EDO :

$$\begin{cases} \dot{q} & = & c(p,q,t) \\ \dot{p} & = & f(p,q,t) \end{cases}$$

en notant $q = x$ et $p = \rho$.

- *Conditions initiales :* $[q(0), p(0)] = (q_0, p_0)$.
- *Espace des phase :* plan (q, p).
- *Trajectoires :* solutions $[q(t), p(t)]$.
- *Champ de vitesse :* vecteur (c, f).

EDP $\frac{\partial \rho}{\partial t} + c\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = f$ avec la condition initiale $\rho(x,0) = \rho_0(x)$:
trajectoires $[q(t), p(t)]$ issues des conditions initiales
décrivant la courbe $p_0 = \rho_0(q_0)$



- À t donné, la solution $\rho(x,t) = P_t(x)$ est une courbe $p = P_t(q)$.
- Lorsque les caractéristiques se coupent P_t n'est plus univaluée.
- L'équation d'advection scalaire cesse alors d'être valide.
- Sur le plan de la physique, il faut spécifier des "relations de saut".
- Sur le plan des mathématiques, la résolution des EDO est un moyen de prolonger la résolution de l'EDP au-delà du choc.

3 Résolution de cas particuliers

Équation d'advection $\frac{\partial\rho}{\partial t} + c(\rho,x,t)\,\frac{\partial\rho}{\partial x} = f(\rho,x,t)$ équivalente à

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot q &=& c(p,q,t)\\ \dot p &=& f(p,q,t)\end{array}\right. \qquad\Longleftrightarrow\qquad \left\{\begin{array}{lcl}\dot x &=& c(\rho,x,t)\\ \dot \rho &=& f(\rho,x,t)\end{array}\right.$$

avec les conditions initiales (q_0, p_0) telles que $p_0 = \rho_0(q_0)$

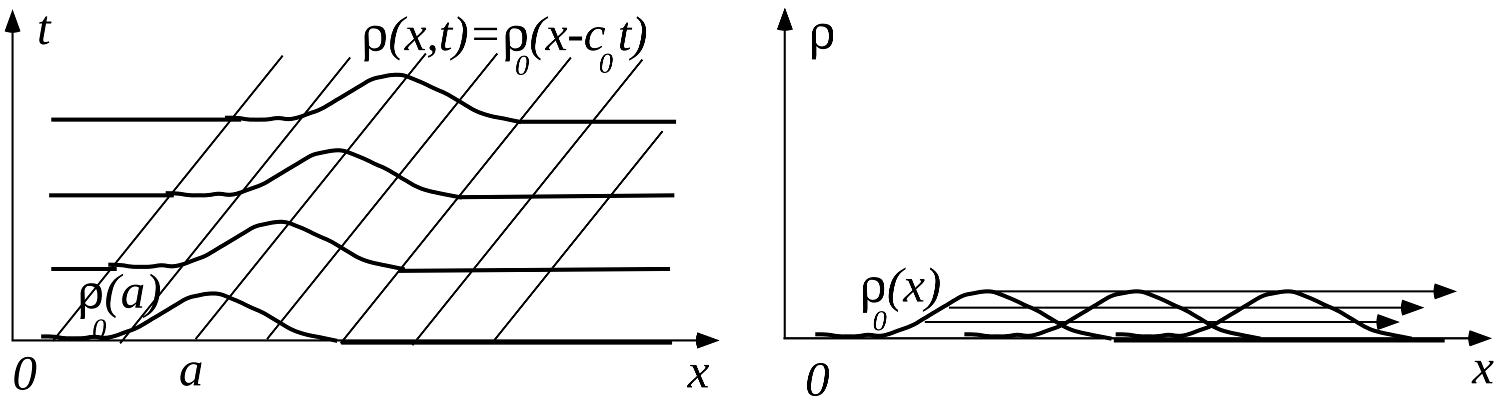
	c_0	$c(x)$	$c(\rho)$	$c(\rho,x,t)$
0	3.1	3.2	3.3	
$f(\rho,x,t)$	3.1	3.2		

3.1 Cas particulier $c = c_0$

3.2 Cas particulier $c = c(x)$

3.3 Cas particulier $c = c(\rho)$ et $f = 0$

3.1 Cas particulier $c = c_0$



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c_0 \, \frac{\partial \rho}{\partial x} = f(\rho, x, t) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \dot{x} & = & c_0 \\ \dot{\rho} & = & f(\rho, x, t) \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales $[x(0), \rho(0)] = [a, \rho_0(a)]$. On en déduit

$$x = X(a,t) = a + c_0 \, t \qquad \text{et} \qquad \dot{\rho} = f[\rho(t), a + c_0 \, t, t] \; .$$

Les caractéristiques $\mathcal{C}_a$ sont donc des droites parallèles de pente $1/c_0$

Dans le cas particulier $f = 0$ **:** $\frac{\partial \rho}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$

La quantité ρ est invariante le long de ces droites caractéristiques :

$$\rho^{(L)}(a,t) = \rho_{\mathcal{C}_a}(t) = \rho_0(a)$$

Comme $x = X(a,t) = a + c_0\, t$, on a $\rho(x,t) = \rho_0(x - c_0\, t)$

La quantité invariante ρ est appellée “invariant de Riemann”.

Dans le cas général $f \neq 0$ **:** $\frac{\partial \rho}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = f(\rho, x, t)$

La solution est $\rho(x,t) = \rho^{(L)}(x - c_0\, t, t)$ où $\rho^{(L)}(a,t) = \rho_{\mathcal{C}_a}(t)$ est obtenu en résolvant l’équation différentielle ordinaire

$$\dot{\rho} = f[\rho(t), a + c_0\, t, t]\ .$$

Sauf dans des cas particuliers, la solution est calculé par une méthode numérique (par exemple avec un schéma de Runge-Kutta)

La quantité $\rho_{\mathcal{C}_a}(t)$ est appellée “fonction de Riemann”.

3.2 Cas particulier $c = c(x)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(x)\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = f(\rho, x, t) \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{x} & = & c(x) \\ \dot{\rho} & = & f(\rho, x, t) \end{cases}$$

avec les conditions initiales $[x(0), \rho(0)] = [a, \rho_0(a)]$.

Si la fonction $c(x)$ ne s'annule pas et l'on peut définir la fonction

$$\Theta(x) = \int_{x_*}^{x} \frac{1}{c(s)}\, ds$$

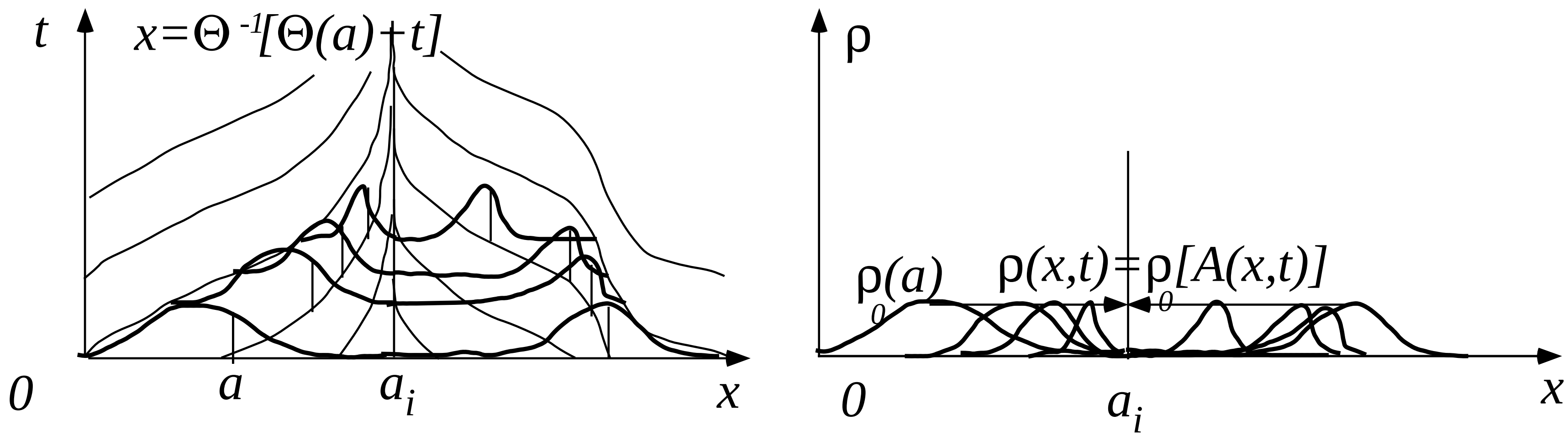
Le système d'EDO admet alors les solutions

$$\Theta[x(t)] - \Theta(a) = t \qquad \Longleftrightarrow \qquad x(t) = \Theta^{-1}\left[\Theta(a) + t\right] \ ,$$

où Θ^{-1} est l'inverse de la fonction Θ.

Les caractéristiques définissent donc le mouvement 1D :

$$X(a, t) = \Theta^{-1}\left[\Theta(a) + t\right]$$



$$X(a,t) = \Theta^{-1}\left[\Theta(a) + t\right] \qquad \Longleftrightarrow \qquad A(x,t) = \Theta^{-1}\left[\Theta(x) - t\right] \ .$$

On remarque que les courbes caractéristique $\mathcal{C}_a$ sont parallèles dans le plan (x,t) et se déduisent les unes des autres par des translation en temps.

$$\text{En effet :} \qquad \Theta\left[x_2(t)\right] - \Theta\left[x_1(t)\right] = \Theta(a_2) - \Theta(a_1)$$

Cas particulier $f = 0$:

La quantité ρ est invariante le long des caractéristiques (invariant de Riemann) et la solution sécrit
$\rho(x,t) = \rho_0[A(x,t)] = \rho_0 \left\{ \Theta^{-1} \left[\Theta(x) - t \right] \right\}$.

Cas général $f \neq 0$:

on a $\rho(x,t) = \rho^{(L)}[A(x,t),t]$ où $\rho^{(L)}(a,t) = \rho_{\mathcal{C}_a}(t)$ (fonction de Riemann) est obtenu en résolvant l'équation :

$$\dot{\rho} = f\left[\rho(t), X(a,t), t\right]$$

avec $X(a,t) = \Theta^{-1}\left[\Theta(a) + t\right]$. La résolution de cette équation, comme le calcul et l'inversion de la fonction $\Theta(x)$, nécessitent, la plupart du temps, le recours à des méthodes numériques.

3.3 Cas particulier $c = c(\rho)$ et $f = 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho)\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & c(\rho) \\ \dot{\rho} & = & 0 \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales $[x(0), \rho(0)] = [a, \rho_0(a)]$.

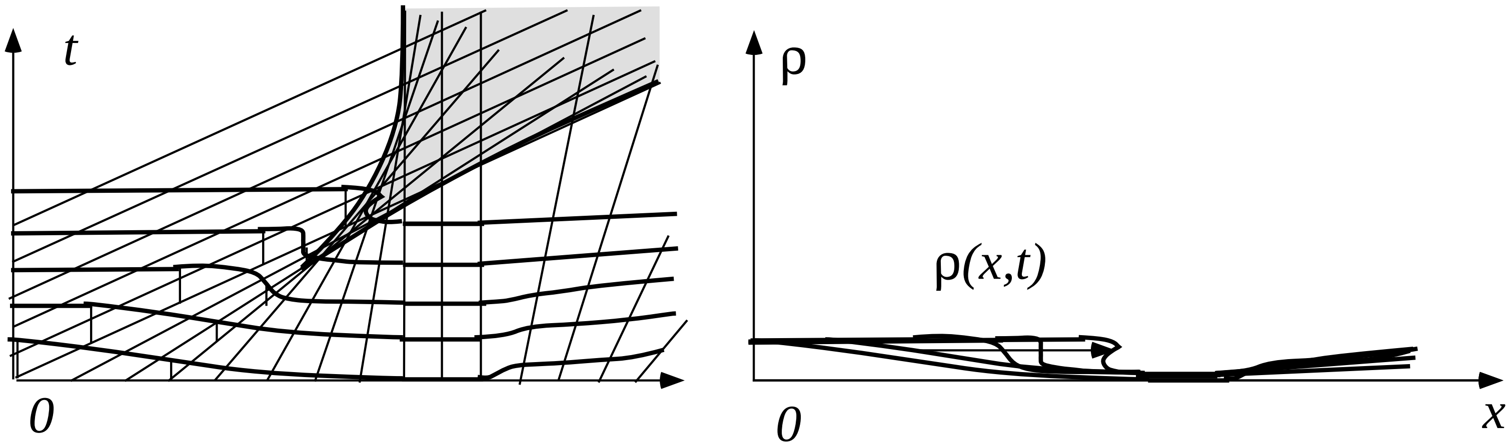
La quantité ρ est constante (invariant de Riemann) et égale à $\rho_0(a)$

Les caractéristiques sont des droites d'équation

$$x(t) = X(a,t) = a + c[\rho_0(a)]\;t\;.$$

Le mouvement 1D inverse $A(x,t)$ s'obtient en résolvant l'équation implicite

$$x = A(x,t) + c\left\{\rho_0\left[A(x,t)\right]\right\}\;.$$



Dans la région du plan (x,t) où les droites caractéristiques ne se coupent pas, cette équation implicite admet une solution unique. La solution de l'équation d'advection s'écrit alors $\rho(x,t) = \rho_0[A(x,t)]$.

Dans la région du plan (x,t) où les droites caractéristiques se coupent Il n'est pas possible de définir une solution $\rho(x,t)$ monovaluée.

La dynamique doit être décrite par une relation de saut venant **compléter** la modèlisation continue de l'équation d'advection.

Conclusion

L'équation d'advection (EDP)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + c[\rho(x,t),x,t]\,\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,t) = f[\rho(x,t),x,t]$$

se ramène à la résolution du système dynamique (EDOs)

$$\begin{cases} \dot{x} = & c(\rho,x,t) \\ \dot{\rho} = & f(\rho,x,t) \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dot{q} = & c(p,q,t) \\ \dot{p} = & f(p,q,t) \end{cases}$$

Condition initiale EDP : $\rho(x,0) = \rho_0(x)$ ou $\rho_{\mathcal{L}}(s)$ connu sur$\mathcal{L}$

Conditions initiales EDO : $[x(0),\rho(0)] = [a,\rho_0(a)]$ ou, le long de$\mathcal{L}$

En effet : $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{C}}(t) = f[\rho, x_{\mathcal{C}}(t), t]$ le long des courbes caractéristiques $\mathcal{C}$ d'équation $x = x_{\mathcal{C}}(t)$ et définies par $\dot{x} = c(\rho,x,t)$.

On peut généraliser au cas du système d'équations d'advection

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + c_i(\underline{\rho}, x, t)\ \frac{\partial \rho_i}{\partial x} = f_i(\underline{\rho}, x, t) \qquad \text{pour } i = 1, ..., N$$

où $\underline{\rho} \in I\!R^N$ est un vecteur $\underline{\rho} = (\rho_1, \rho_2, ..., \rho_N)$ à N composantes.

N familles de courbes caractéristiques $\mathcal{C}_i$ pour $i = 1, .., N$ propagent N conditions à partir d'une ou plusieurs courbes $\mathcal{L}$.

Résolution du système dynamique à $2N$ degrés de liberté

$$\begin{cases} \dot{x}_i = & c_i(\underline{\rho}, x_i, t) \\ \dot{\rho}_i = & f_i(\underline{\rho}, x_i, t) \end{cases} \qquad \text{pour } i = 1, ..., N \quad .$$

La méthode des caractéristiques pour résoudre un système équations aux dérivées partielles en (x, t) consiste à essayer de combiner les équations pour les mettre sous forme advective. Lorsque cela est possible, on dit que le système est hyperbolique.

$\boxed{\text{FORMULAIRE}}$

DÉRIVÉE LE LONG DE COURBES

Dérivée d'un champ le long d'une courbe :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{L}}(t) &= \dot{x}_{\mathcal{L}}(t) = c_{\mathcal{L}}(t) \\ \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathcal{L}}(\mathrm{t}) &= \left[\frac{\partial}{\partial t} + c_{\mathcal{L}}(t)\,\frac{\partial}{\partial x}\right]\rho\,[x_{\mathcal{L}}(t), t] \end{aligned}$$

Famille de courbes $x_{\mathcal{L}_a}(t) = X(a,t)$ et mouvement 1D :

$$\rho^{(L)}(a,t) = \rho_{\mathcal{L}_a}(t) = \rho\,[X(a,t),t] \quad \Longleftrightarrow \rho(x,t) = \rho^{(L)}\,[A(x,t),t]$$

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION D'ADVECTION

Équation d'advection :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + c(\rho, x, t)\,\frac{\partial\rho}{\partial x} = f(\rho, x, t) \qquad \text{avec} \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x)$$

Système dynamique équivalent :

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{C}} & = c\,(\rho, x, t) \\ \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{C}} & = f\,(\rho, x, t) \end{cases} \qquad \text{avec} \quad [x(0), \rho(0)] = [a, \rho_0(a)]$$

Changement de variable :

$$\begin{cases} da & = dx - c\,dt \\ d\tau & = dt \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a & = & A(x, t) \\ \tau & = & t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} & = & \frac{\partial}{\partial a} & \\ \frac{\partial}{\partial t} & = & -c\,\frac{\partial}{\partial a} & + \frac{\partial}{\partial\tau}\tau \end{cases}$$

Résumé de la méthode des caractéristiques :

$$\frac{d\rho}{dt} = f(\rho, x, t) \quad \text{sur la courbe } \mathcal{C} \text{ d'équation} \quad \frac{dx}{dt} = c(\rho, x, t)\;.$$

CAS PARTICULIERS DE RÉSOLUTION DE $\frac{\partial \rho}{\partial t} + c\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = f$

Cas $c = c_0$

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{C}} = f(\rho, a + c_0\, t, t) \quad \text{sur la droite } \mathcal{C} \text{ d'équation} \quad x = a + c_0\, t\ .$$

Cas $c = c(x)$

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{C}} = f[\rho, X(a,t), t] \quad \text{sur la courbe } \mathcal{C} \text{ d'équation} \quad x = X(a,t)$$

$$\text{avec} \quad X(a,t) = \Theta^{-1}\left[\Theta(a) + t\right] \quad \text{et} \quad \Theta(x) = \int_{x_*}^{x} \frac{1}{c(s)}\, ds$$

Cas $c = c(\rho)$ **et** $f = 0$

$$\rho(x,t) = \rho_0(a) \quad \text{sur la droite } \mathcal{C} \text{ d'équation} \quad x = a + \rho_0(a)\, t\ .$$