CORRIGÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

Corrigé 0.1 Onde de crue de faible amplitude

1) Les courbes caractéristiques sont définies par $\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}U(x) = \frac{3}{2}U_0/(1+\lambda\, x)$ ce qui s'intègre en $\left(1+\frac{\lambda}{2}x\right)x - \frac{3}{2}U_0\, t = C$ où C est une constante arbitraire. Dans le plan (x,t), ces courbes forment la famille des paraboles $t = \alpha\, x_1^2 + \beta\, x + C$ avec $\alpha = \frac{\lambda}{3U_0}$, $\beta = \frac{2}{3U_0}$ et C quelconque. **2)** Les équations des deux trajectoires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ s'écrivent respectivement $t = \alpha\, x_1^2 + \beta\, x_1 + C_1$ et $t = \alpha\, x_2^2 + \beta\, x_2 + C_2$. On en déduit $\alpha\left(x_2^2 - x_1^2\right) + \beta\,(x_2 - x_1) = C_2 - C_1$ et donc $L(t) = x_2(t) - x_1(t) = \frac{C_1 - C_2}{\alpha[x_2(t)+x_1(t)]+\beta}$. Comme $x_1(t)$ et $x_2(t)$ tendent vers l'infini lorsque t tend vers l'infini, on voit que $L(t)$ tend vers zéro.

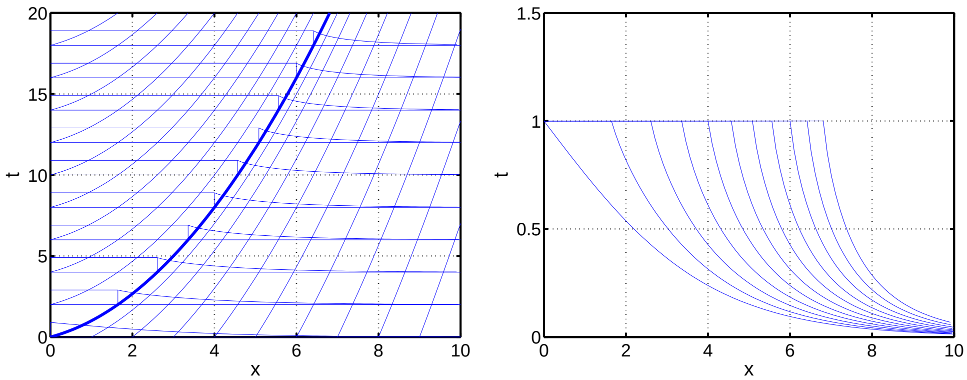

Figure 1: a) Courbes caractéristiques et profils $\widetilde{h}(x,t)$. b) Profils seuls.

3) Le domaine d'influence issu de la demi-droite Ot est située à gauche de la courbe caractéristique $x_0(t)$ issue du point $(0,0)$, c'est-à-dire la parabole d'équation $t = \alpha\, x^2 + \beta\, x$. On a $\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_*$ pour $t \geq 0$ et $0 \leq 0 \leq x_0(t)$. **4)** Étant donné un point (x,t) situé à droite de la courbe $x_0(t)$, l'équation $t = \alpha x^2 + \beta x - (\alpha a^2 + \beta a)$ est celle de la courbe caractéristique qui passe par le point $(a,0)$ de la demi-droite Ox avec $a = A(x,t) = \frac{\beta}{2\alpha}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha^2}{\beta^2}x^2 + \frac{4\alpha}{\beta}x - \frac{4\alpha t}{\beta^2}}\right]$. La solution dans le domaine d'influence de la condition initiale s'écrit alors $h(x,t) = h_i[A(x,t)] = \widetilde{h}_*\left\{1 - \tanh\left[A(x,t)/L_0\right]\right\}$. Par un raisonnement géométrique en suivant les courbes caractéristiques (ou par une étude de du sens de variation des fonctions), on voit que le profil $\widetilde{h}(x,t)$ décroît entre $x_0(t)$ et l'infini de la valeur $\widetilde{h}_0$ à la valeur zéro. Ce profil est advecté vers l'aval, les valeurs de $\widetilde{h}$ restant constantes le long des courbes caractéristiques. Son échelle de longeur caractéristique tend vers zéro.

Corrigé 0.2 Pluie et ondes de crue

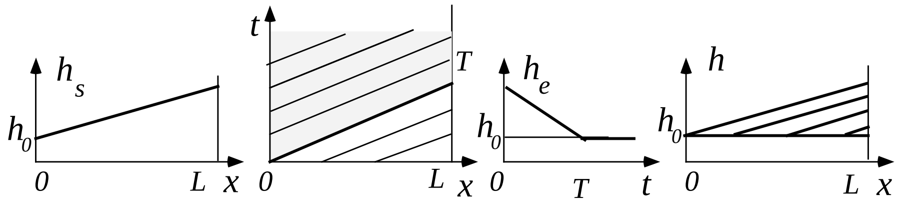

Figure 2: *Vidange de la rivière a) $h_s(x)$, b) Région uniforme et droites caractéristiques, c) $h_e(t)$, d) $h(x,t)$.*

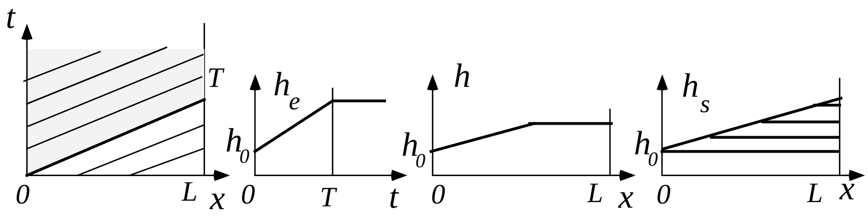

Figure 3: *Remplissage de la rivière a) droites caractéristiques, b) $h_e(t)$, c) $h(x,t)$, d) $h_s(x)$ et $h(x,t)$.*

1)La solution de l'équation $U_0\, h_s'(x) = P_0$ avec la condition $h_s(0) = h_0$ est $h_s(x) = h_0 + \gamma\, x$ avec $\gamma = P_0/U_0$. Le profil $h_s(x)$ est linéaire. **2)**Les caractéristiques de ce modèle sont des droites d'équation $x = a + U_0\, t$ si a désigne l'abscisse de l'intersection avec l'intervalle $[0, L]$ de l'axe des x ou $x = U_0\,(t - \tau)$ si τ désigne l'ordonnée de l'intersection avec l'axe des t. Les droites caractéristiques issues du demi-axe des temps $t \geq 0$ coupent la droite $x = L$ à partir du temps $T = L/U_0$. Comme h est un invariant de Riemann le long des caractéristiques et que $h(0,t) = h_0$ pour $t \geq 0$ on a $h(L,t) = h_0$ pour $t \geq T$. **3)**La région $t \geq 0$ délimitée par la droite caractéristique $x = U_0\, t$ est uniforme avec $h(x,t) = h_0$. **4)**Pour $t \leq T$, la caractéristique passant par le point (L,t) du plan (x,t) coupe l'axe des x en $a = L - U_0\, t$. La condition initiale est égale à $h_s(a) = h_0 + \gamma\, a$ en ce point. On a donc $h_e(t) = h(x,t) = h_0 + \gamma\, L - \gamma\, U_0\, t = h_0 + \gamma\, L - P_0\, t$ pour $t \in [0,T]$. La hauteur $h_e(t)$ décroît linéairement à partir de la valeur $h_s(L)$ pour stagner à la valeur h_0 au-delà de $t = T$. **5)**Pour $x \leq U_0\, t$, on a vu que $h(x,t) = h_0$. Pour $x \geq U_0\, t$, la droite caractéristique passant par (x,t) coupe l'axe des x en $a = x - U_0\, t$, ce qui entraîne $h(x,t) = h_0 + \gamma\, x - P_0\, t$. La solution $h(x,t)$ est égale à $h_s(x - U_0\, t)$ pour $x \geq U_0\, t$ et égale à h_0 sinon. **6)**Les droites caractéristiques sont les mêmes que pour le cas $P = 0$, mais h n'est plus qu'une fonction de Riemann vérifiant $\left(\frac{dh}{dt}\right)_{\mathcal{C}} = P_0$. Pour $t \leq T$, l'intégration de la fonction de Riemann le long de la droite caractéristique passant par (L, t) conduit à $h_e(t) = h(L,t) = h_0 + P_0\, t$. Pour $t \geq T$, la droite caractéristique coupe l'axe des t en $(0, t - L/U_0)$ et l'intégration de la fonction de Riemann conduit à $h_e(t) = h(L,t) = h_0 + P_0\, L/U_0 = h_0 + \gamma\, L$. Le profil $h_e(t)$ croît linéairement de h_0 à $h_0 + \gamma\, L = h_0 + P_0\, T$ sur l'intervalle $[0, T]$ puis reste constant. **7)**Pour $x \geq U_0\, t$, l'intégration de la fonction de Riemann conduit à $h(x,t) = h_0 + P_0\, t$. Pour $x \leq U_0\, t$, la droite caractéristique passant pas (x,t) coupe l'axe des t en $(0, t - x/U_0)$. L'intégration de la fonction de Riemann conduit à $h(x,t) = h_0 + P_0\, x/U_0 = h_0 + \gamma\, x$. La solution $h(x,t)$ part de h_0, croît linéairement avec le temps jusqu'à atteindre la valeur du profil stationnaire $h_s(t)$. Le point où cette valeur est atteinte se déplace à la vitesse U_0.

Corrigé 0.3 Modèle de crues rapides

Tracé qualitatif d'un hydrogramme

1)L'unité SI pour le coefficient de Strickler est en $\mathrm{m}^{\frac{1}{3}}\ \mathrm{s}^{-1}$. **2)**En remplaçant U par son expression en fonction de h, la loi de conservation de la masse $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U\, h) = 0$ devient $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta\, h^{\frac{5}{3}}\right) = 0$ avec $\beta = K\, \sqrt{I}$.

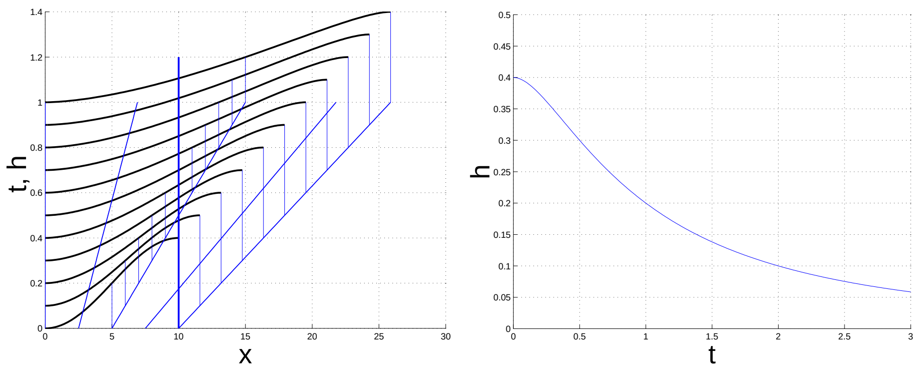

Figure 4: *a) Évolution $h(x,t)$ de la condition initiale $h_0(x)$. b) Courbe $h(L,t)$ en fonction du temps.*

3)Cette condition initiale correspond à une pluie dont l'intensité a été maximale au bas de la pente et nulle au sommet. **4)**Le modèle s'écrit sous la forme $\frac{\partial h}{\partial t} + c(h)\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ avec $c(h) = \frac{5}{3}\beta\; h^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}U(h)$. Les caractéristiques sont les droites d'équations $x = a + c[h_0(a)]\, t = a + \frac{5}{3}\beta\, (h_*)^{\frac{2}{3}}\, [1 - \cos(k\, a)]^{\frac{2}{3}}\, t$ pour $a \in [0, L]$. **5)**Le profil initial est étirée vers la droite, d'autant plus rapidement que l'on s'écarte de la gauche $x = 0$. **6)**L'hydrogramme $h(L,t)$ décroît, vite au début et très lentement à la fin dans la mesure où des dernières caractéristiques ont des vitesses (inverse de la pente) très lentes.

Tracé quantitatif d'un hydrogramme

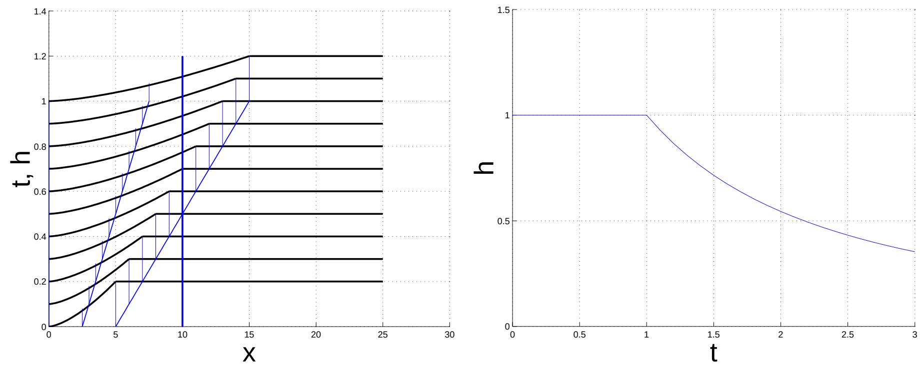

Figure 5: *a) Évolution $h(x,t)$ de la condition initiale $h_0(x)$ b) Courbe $h(L,t)$ en fonction du temps.*

7)Le modèle s'écrit $\frac{\partial h}{\partial t} + c(h)\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ avec $c(h) = \frac{5}{3}\beta\, h^{\frac{2}{3}}$. Pour $a \in [0,l]$, on a $c[h_0(a)] = \gamma\, a$ avec $\gamma = \frac{5}{3}\beta\, h_*^{\frac{2}{3}}/l$. Pour $a \in [l,L]$, on a $c[h_0(a)] = c(h_*) = c_*$ avec $c_* = \gamma\, l$. Les équations des caractéristiques sont donc $x = (1+\gamma\, t)a$ pour $a \leq l$ et $x = a + c_*\, t$ pour $a \geq l$. **8)**Les points (x,t) tels que $x \geq l + c_*\, t$ vérifient $h(x,t) = h_*$. La caractéristique qui passe par un point (x,t) situé à gauche de cette région uniforme a pour équation $x = (1+\gamma\, t)a$. Il est ici facile d'exprimer $a = x/(1+\gamma\, t)$. Comme h est constant le long d'une caractéristique, on en déduit $h(x,t) = h_0(a) = h_0[x/(1+\gamma\, t)]$ ce qui conduit à $h(x,t) = h_*\,(x/l)^{\frac{3}{2}}\,(1+\gamma\, t)^{-\frac{3}{2}}$. **9)**Le profil initial en $a^{\frac{3}{2}}$ est étiré vers la droite, d'autant plus que l'on est loin de $a = 0$. La région des points où $h = h_*$ se déplace vers la droite à la vitesse constante $c_* = \gamma\, l$. **10)**On en déduit donc que $h(L,t) = h_*$ pour $t \in [0, t_*]$ avec $t_* = \frac{1}{\gamma}(L/l - 1)$ et que $h(x,t) = h_*(L/l)^{\frac{3}{2}}(1+\gamma\, t)^{-\frac{3}{2}}$ pour $t \geq t_*$.

Ruissellement en présence de pluie

11) Les caractérsitiques sont définies par le système d'équations $\dot{x} = \frac{5}{3}\beta\, h^{\frac{2}{3}}$ et $\dot{h} = P_0$ avec les conditions initiales $x(0) = a$ et $h(0) = 0$. On en déduit $h(t) = P_0\, t$ et $\dot{x} = \frac{5}{3}\,\beta\, P_0^{\frac{2}{3}}\, t^{\frac{2}{3}}$ que l'on intègre en $x(t) = a + \beta\, P_0^{\frac{2}{3}}\, t^{\frac{5}{3}}$. On vérifie qu'il s'agit bien de l'équation de la caractéristique passant par $(a,0)$. **12)**Les conditions initiales pertinentes sont ici $x(\tau) = 0$ et $h(\tau) = 0$. On en

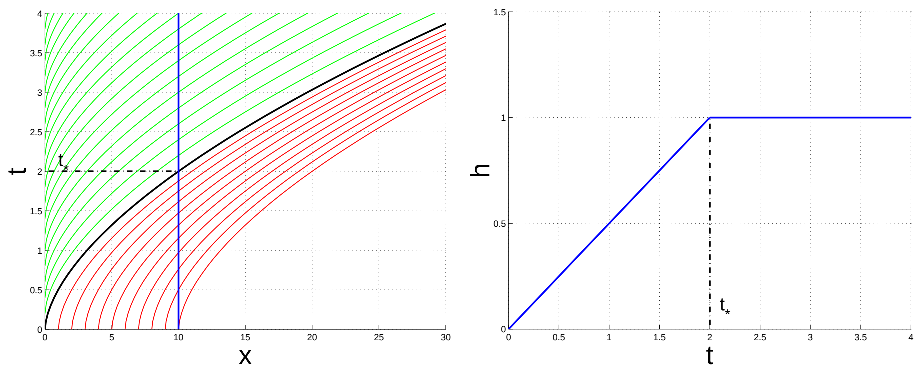

Figure 6: *a) Courbes caractéristiques. b) Courbe $h(L,t)$ en fonction du temps.*

déduit que $h(t) = P_0(t-\tau)$ et que l'équation de la caractéristique passant par $(0,\tau)$ s'écrit $x(t) = \beta\, P_0^{\frac{2}{3}}\,(t-\tau)^{\frac{5}{3}}$. **13)**Les caractéristiques sont des courbes déduites les unes des autres par des translations dans le plan (x,t). Elles ne se coupent donc pas. **14)**L'équation de courbe caractéristique issue du point $(x,t) = (0,0)$ est $x = \beta\, P_0^{\frac{5}{3}}\, t^{\frac{5}{3}}$. Elle coupe la droite $x = L$ en (L, t_*) avec $t_* = (L/\beta)^{\frac{3}{5}}/P^{\frac{2}{5}}$. **15)**La valeur de $h(L,t)$ à l'équilibre est $h_* = P_0\, t_* = (L\, P_0/\beta)^{\frac{3}{5}}$. **16)**L'application numérique conduit à un temps t_* de l'ordre de 2 jours et une hauteur de ruissellement au bas de la pente de l'ordre de 2 mm. **17)**Les courbes caractéristiques qui atteignent le segment de droite $(x,t) = (L,t)$ avec $t \in [0, t_*]$, sont toute issue du segment de droite $(x,t) = (a,t)$ avec $a \in [0, L]$. **18)**La valeur de $h(L,t)$ est donc égale à $h(L,t) = P_0\, t$ pour $t \in [0, t_*]$ et à $h(L,t) = h_*$ pour $t \geq t_*$. **19)**On remarque que la condition sur t_0 s'écrit $t_0 \geq t_*$. Au-delà de $t = t_0$, les courbes caractéristiques qui coupe la droite $x = L$ n'ont soit pas vu de pluie, soit vu de la pluie pendant le temps $t_* - (t - t_0)$ si ce temps est positif. Comme la hauteur $h(t)$ est une fonction linéaire du temps de pluie, on en déduit que l'hydrogramme de crue est $h(L,t) = P_0\, t$ pour $t \in [0, t_*]$, $h(L,t) = h_* = P_0\, t_*$ pour $t \in [t_*, t_0]$, $h(L,t) = h_* - P_0(t - t_0) = P_0(t_* + t_0 - t)$ pour $t \in [t_0, t_0 + t_*]$ et $h(L,t) = 0$ pour $t \geq t_0 + t_*$. **20)**À $t = t_0$, on a $h(x, t_0) = h_*(x/l)^{3/2}(1 + \gamma\, t_0)^{-3/2}$. L'hydrogramme de crue est celui de la question 10) en prenant $t = t_0$ comme origine des temps et en remplaçant h_* par $h_*(1 + \gamma\, t_0)^{-3/2}$.