COURS ÉCRIT

Introduction

On présente ici la méthode de résolution de l'équation aux dérivées partielles unidimensionnelle (1D) suivante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho, x, t)\, \frac{\partial \rho}{\partial x} = f(\rho, x, t) \tag{1}$$

dans le cas général ou dans les cas particuliers où les fonctions c et f sont indépendantes de certaines de leurs variables.

Cette équation représente l'advection d'un champ scalaire $\rho(x, t)$ par le champ de vitesse $c(\rho, x, t)$ qui dépend de l'espace x et du temps t ainsi que la valeur du champ ρ lui-même. Le terme $f(\rho, x, t)$ représente un terme de production de la grandeur ρ. Ce type d'équation se rencontre très souvent en mécanique des fluides.

L'examen approfondi de cet exemple est un préalable pour la présentation de la méthode des caractéristiques utilisée pour la résolution des équations aux dérivées partielles en (x, t) hyperbolique couplant l'évolution de plusieurs champs scalaires. Cette présentation traite en fait de la méthode des caractérisques dans le cas le plus simple possible.

1 Dérivée le long de courbes

On définit ici la dérivée d'un champ $\rho(x,t)$ le long d'une courbe $\mathcal{L}$ du plan (x,t). On se limite au cas des courbes $\mathcal{L}$ que l'on peut décrire par une équation $x = x_{\mathcal{L}}(t)$ et qui admettent donc une vitesse $c_{\mathcal{L}} = \dot{x}_{\mathcal{L}}$ bornée. Cette notion de dérivée est facile à définir intuitivement : on regarde la variation de ρ en suivant la courbe $\mathcal{L}$ et on dérive par rapport au temps. La difficulté principale de ce paragraphe réside dans la définition de notations : $\rho^{(L)}(a,t) = \rho[x_{\mathcal{L}}(t),t]$ avec $a = x_{\mathcal{L}}(0)$, $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{L}} = \frac{\partial \rho^{(L)}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + c_{\mathcal{L}} \frac{\partial \rho}{\partial x}$ avec $c_{\mathcal{L}} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{L}} = \dot{x}_{\mathcal{L}}$, etc... Lorsque l'on considère une famille de courbes $\mathcal{L}_a$ paramétrée par a, ont peut faire l'analogie entre les dérivées d'un champ le long de ces courbes et sa dérivée particulaire pour le mouvement 1D défini par ces courbes. Les notions de représentations lagrangienne et eulérienne sont alors pertinentes pour comprendre la complexité des notations.

1.1 Courbe à vitesse bornée

On considère une courbe $\mathcal{L}$ de longueur finie ou infinie dans le plan (x,t). On dit que c'est une courbe "à vitesse bornée" si on peut la décrire par une fonction dérivable $x = x_{\mathcal{L}}(t)$ où t appartient à un intervalle fini ou infini. On peut en effet appeler "vitesse" la dérivée de la fonction $x_{\mathcal{L}}$ par rapport à la variable t que l'on nomme variable temps et la noter

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{L}}(t) = \dot{x}_{\mathcal{L}}(t) \qquad \text{ou encore} \qquad c_{\mathcal{L}}(t) = \dot{x}_{\mathcal{L}}(t)\ . \tag{2}$$

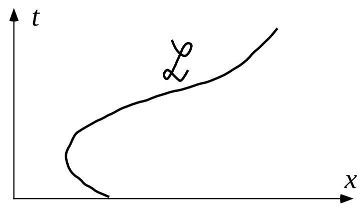

Figure 1: *Courbe $\mathcal{L}$ à vitesse bornée*

Dans un plan (x,t) où x est sur l'axe des abscisses et t sur l'axe des ordonnées, la vitesse est l'inverse de la pente de la courbe $\mathcal{L}$ lorsque l'on visualise localement la courbe $\mathcal{L}$ comme un morceau de fonction exprimant t (en ordonnée) en fonction de x (en abscisse). Tant que la vitesse reste bornée, cette pente ne s'annule pas. On peut donc associer une seule valeur de x à une valeur de t donnée.

Exemples : la courbe définie par $x + v\,t - \gamma\,t^2 = 0$ est à vitesse bornée. La courbe définie par $\nu t + x^2 = 0$ à une vitesse infinie pour $x = t = 0$. La courbe définie par $t = 0$ à une vitesse infinie pour tout x.

1.2 Dérivée d'un champ le long d'une courbe

On considère un champ $\rho(x,t)$ différentiable dans le plan (x,t) et une courbe $\mathcal{L}$ à vitesse bornée d'équation $x = x_{\mathcal{L}}(t)$. On appelle "dérivée de ρ le long de $\mathcal{L}$" la quantité

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{L}}(t) = \left[\frac{\partial}{\partial t} + c_{\mathcal{L}}(t)\,\frac{\partial}{\partial x}\right]\rho\left[x_{\mathcal{L}}(t), t\right] \tag{3}$$

avec $c_{\mathcal{L}}(t) = \dot{x}_{\mathcal{L}}(t)$. En notant $\rho_{\mathcal{L}}(t) = \rho\left[x_{\mathcal{L}}(t), t\right]$, un calcul simple montre que $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{L}} = \dot{\rho}_{\mathcal{L}}$. On vérifie trivialement que si $\rho(x,t) = x$, cette notation $\left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathcal{L}}$ coïncide avec la notation $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{L}}$ définie précédemment et désignant la "vitesse" associée à la courbe $\mathcal{L}$.

1.3 Famille de courbes à vitesses bornées

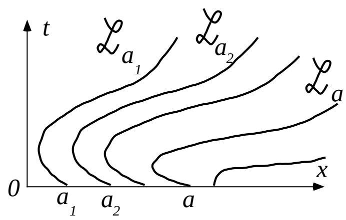

Figure 2: *Famille de courbes $\mathcal{L}$ à vitesse bornée*

On considère maintenant une famille de courbes à vitesses bornées que l'on choisit de paramétrer par ses intersections a avec l'axe $t = 0$. La courbe $\mathcal{L}_a$ passe donc par le point $(a, 0)$ du plan (x,t). L'ensemble des fonctions $x_{\mathcal{L}_a}(t)$ qui décrivent les courbes $\mathcal{L}_a$ permet de définir une fonction $X(a,t)$ à travers la relation

$$x_{\mathcal{L}_a}(t) = X(a,t)\ . \tag{4}$$

On peut alors écrire $c_{\mathcal{L}_a} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{L}_a} = \frac{\partial X}{\partial t}(a,t)$. On peut appeler $X(a,t)$ le "mouvement 1D" dont les trajectoires sont les courbes $\mathcal{L}_a$ dans le plan (x,t).

Lorsque les courbes $\mathcal{L}_a$ ne se coupent pas, il est possible de définir le mouvement inverse $A(x,t)$ qui associe à tout point x la position $a = A(x,t)$ à $t = 0$ de la courbe $\mathcal{L}$ qui passe par x au temps t.

1.4 Représentation lagrangienne pour le mouvement 1D

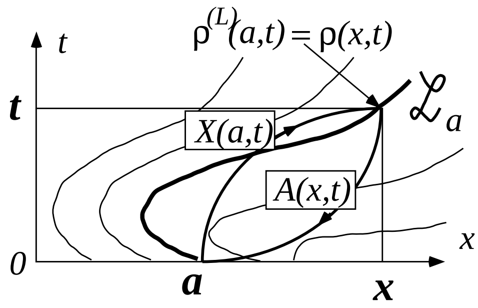

Figure 3: *Représentations eulérienne $\rho(x,t)$ et lagrangienne $\rho^{(L)}(a,t)$ du champ ρ pour le mouvement $X(a,t)$ et le mouvement inverse $A(x,t)$.*

Étant donné un champ $\rho(x,t)$, on peut alors définir le champ $\rho^{(L)}(a,t)$ par la relation

$$\rho^{(L)}(a,t) = \rho_{\mathcal{L}_a}(t) = \rho\left[X(a,t),t\right] \ . \tag{5}$$

On voit que $\rho(x,t)$ peut être considéré comme la représentation eulérienne du champ ρ et $\rho^{(L)}(a,t)$ comme sa représentation lagrangienne pour le mouvement unidimensionnel $X(a,t)$. La quantité $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{L}_a}$ peut être vue comme la dérivée particulaire du champ ρ pour le mouvement $X(a,t)$.

Réciproquement, si l'on connait la représentation lagrangienne $\rho^{(L)}(a,t)$ pour le mouvement 1D, c'est-à-dire $\rho_{\mathcal{L}_a}(t)$ pour toutes les courbes $\mathcal{L}_a$, on peut retrouver la représentation eulérienne $\rho(x,t)$ du champ ρ grâce au mouvement inverse $A(x,t)$. En effet, on peut écrire

$$\rho(x,t) = \rho^{(L)}\left[A(x,t),t\right] \ . \tag{6}$$

2 Résolution générale de l'équation d'advection

On montre ici que la résolution de l'équation d'advection, qui est une équation aux dérivées partielles, se ramène à la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires pour une famille de conditions initiales. Ce système définit une famille de courbes $\mathcal{C}$ à vitesse bornée que l'on nomme "courbes caractéristiques". Dans le cas particulier où $f = 0$, la quantité ρ est invariante le long de ces courbes (invariant de Riemann). Dans le cas général, la variation de ρ le long de ces courbes est alors égale à f.

La méthode des caractéristiques consiste donc à résoudre ce "système dynamique" en utilisant comme conditions initiale les valeurs de x et de ρ supposées connues sur une courbe $\mathcal{L}$ du plan (x,t). Cette méthode peut aussi s'interpréter comme un changement de variable. Sa validité cesse lorsque les courbes caractéristiques se coupent. Ce cas correspond à l'apparition de singularités dans la solution de l'équation d'advection.

2.1 Construction des solutions avec un famille de courbes

Les notions introduites sur la dérivation le long d'une courbe ou d'une famille de courbes sont utiles pour présenter la méthode de résolution de l'équation aux dérivées partielles suivante, que l'on appelera "équation d'advection" :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho, x, t)\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = f(\rho, x, t)\ . \tag{7}$$

On peut en effet remplacer cette équation aux dérivées partielles par la recherche d'une famille de courbes $\mathcal{C}$ d'équations $x = x_{\mathcal{C}}(t)$ et d'une famille de fonctions $\rho_{\mathcal{C}}(t)$ solutions du système d'équations différentielles ordinaires couplées

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{x}_{\mathcal{C}}(t) & = c\,(\rho_{\mathcal{C}}, x_{\mathcal{C}}, t) \\ \dot{\rho}_{\mathcal{C}}(t) & = f\,(\rho_{\mathcal{C}}, x_{\mathcal{C}}, t) \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{C}} & = c\,(\rho, x, t) \\ \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{C}} & = f\,(\rho, x, t) \end{array}\right. \tag{8}$$

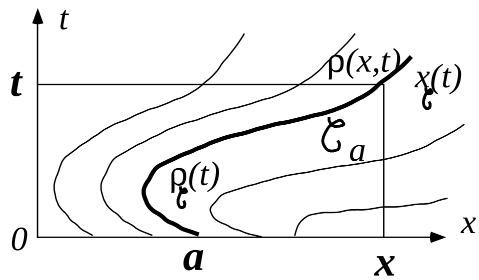

Figure 4: *Famille de courbes caractéristiques.*

Pour le démontrer, considérons la famille des solutions $[x_{\mathcal{C}_a}(t), \rho_{\mathcal{C}_a}(t)]$ de ce système d'équations différentielles ordinaires, que l'on a paramétrée par les intersections $a = x_{\mathcal{C}_a}(0)$. La famille des courbes $\mathcal{C}_a$ d'équations $x = x_{\mathcal{C}_a}(t)$ permet de définir un mouvement unidimensionnel par la relation $x = X(a,t) = x_{\mathcal{C}_a}(t)$. On peut aussi définir la fonction $\rho^{(L)}(a,t) = \rho_{\mathcal{C}_a}(t)$ à partir de cette famille de solutions.

Si on suppose que les courbes $\mathcal{C}_a$ *ne se coupent pas*, on peut alors définir le mouvement inverse $a = A(x,t)$ et construire la représentation eulérienne du champ $\rho(x,t)$ à partir des solutions $\rho_{\mathcal{C}_a}(t)$ en écrivant

$$\rho(x,t) = \rho^{(L)}\left[A(x,t),t\right] = \rho_{\mathcal{C}_{A(x,t)}}(t) \; . \tag{9}$$

En utilisant la définition de dérivée du champ $\rho(x,t)$ le long des courbes $\mathcal{C}$, on peut donc écrire

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{C}}(x,t) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + c\left[\rho(x,t),x,t\right]\,\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,t) \tag{10}$$

où l'on a utilisé $c_{\mathcal{C}}(t) = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{C}}(t) = \dot{x}_{\mathcal{C}}(t) = c\left[\rho_{\mathcal{C}}(t),x_{\mathcal{C}}(t),t\right]$. On a ainsi construit un champ $\rho(x,t)$ solution de l'équation aux dérivées partielles de départ. En effet, cette équation s'écrit sous la forme de la relation

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{C}}(x,t) = f(\rho,x,t) \; , \tag{11}$$

qui a été imposée dans la construction du champ ρ le long des courbes $\mathcal{C}$.

On dit que les courbes $\mathcal{C}$ sont les "courbes caractéristiques" de l'équation aux dérivées partielles. On a ainsi ramené la résolution de cette équation à la détermination d'un ensemble de solutions (trajectoires) d'un système d'équations différentielles ordinaires couplées.

2.2 Méthode des caractéristiques

Supposons par exemple que l'on connaisse la condition initiale $\rho(x,0) = \rho_0(x)$ de l'équation aux dérivées partielles. La résolution du système d'équations différentielles ordinaires avec les conditions initiales $x(0) = a$ et $\rho(0) = \rho_0(a)$ permet de résoudre le problème, dans la région du plan (x,t) où les courbes caractéristiques ne se coupent pas. Dans cette région, il est possible de construire une solution $\rho(x,t)$ de l'équation aux dérivées partielles à partir des solutions du système d'équations différentielles ordinaires. Dans les régions où ces courbes se coupent, les solutions du systèmes d'équations différentielles ordinaires conduisent à des fonctions $\rho(x,t)$ multivaluées. Sur la frontière de ces deux types de régions, les solutions de l'équations aux dérivées partielles cessent d'être continues et il y a donc apparitions de chocs. Il faut alors invoquer d'autres équations (les relations de saut) pour calculer la dynamique de ces chocs.

Plus généralement, il suffit de connaître la valeur de $\rho(x,t) = \rho_{\mathcal{L}}(t)$ sur une courbe $\mathcal{L}$ transverse aux courbes caractéristiques pour pouvoir résoudre

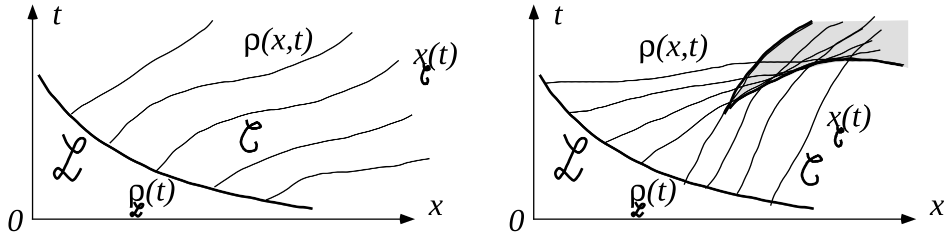

Figure 5: *Méthode des caractéristiques : (a) cas où les courbes caractéristiques ne se coupent pas, (b) cas où elles se coupent.*

l'équations aux dérivées partielles. En effet, les courbes caractéristiques "propagent" l'information dans le plan (x, t) à partir de l'information connue sur la courbe $\mathcal{L}$. Dans le cas général, on ne sait pas a priori si une courbe $\mathcal{L}$ sera transverse ou non aux courbes caractéristiques dont la forme est déterminée par la valeur de ρ sur $\mathcal{L}$.

2.3 Point de vue du changement de variable

Une autre manière de présenter ou de voir la méthode des caractéristiques consiste à considérer le changement de variable permettant de passer du couple (x, t) au couple de nouvelles variables (a, τ) définies par les relations

$$\left\{ \begin{array}{lcl} da & = & dx - c[\rho(x,t), x, t]\ dt \\ d\tau & = & dt \end{array} \right. . \tag{12}$$

Ce changement de variable est défini sous forme d'un système différentiel qui conduit a des relations de la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a & = & A(x,t) \\ \tau & = & t \end{array} \right. \quad \text{ou bien} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & X(a,\tau) \\ t & = & \tau \end{array} \right. \tag{13}$$

que l'on ne peut pas déterminer, dans le cas général, sans connaître le champ $\rho(x, t)$. Ces relations différentielles sont en effet des notations pour les relations

$$\left\{ \begin{array}{lcl} da & = & dx - c\ dt \\ d\tau & = & dt \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial A}{\partial x}(x,t) = 1 \\ \frac{\partial A}{\partial t}(x,t) = -c[\rho(x,t), x, t] \end{array} \right. . \tag{14}$$

Les conditions $X(a, 0) = a$ ou $A(x, 0) = x$ permettent de définir de manière unique le changement de variable.

On peut exprimer les opérateurs différentiels $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ en fonction de $\left(\frac{\partial}{\partial a}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right)$ en transposant la relation différentielle

$$\begin{pmatrix} da \\ d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial a} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \end{pmatrix} . \tag{15}$$

En notant $\rho^{(L)}(a,\tau)$ l'expression du champ $\rho(x,t)$ pour les nouvelles variables, l'équation d'advection scalaire s'écrit

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\rho &= \left(-c\,\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial \tau}+c\,\frac{\partial}{\partial a}\right)\rho^{(L)} = \\ \frac{\partial \rho^{(L)}}{\partial \tau}(a,\tau) &= f\left[\rho^{(L)}(a,\tau),X(a,\tau),\tau\right]\ . \end{aligned} \tag{16}$$

On peut aussi exprimer le changement de variable inverse sous la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} dx &=& da + c\,d\tau \\ dt &=& d\tau \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial X}{\partial a}(a,\tau)=1 \\ \frac{\partial X}{\partial \tau}(a,\tau)=c\left[\rho^{(L)}(a,\tau),X(a,\tau),\tau\right] \end{array}\right. \tag{17}$$

Ce changement de variable permet donc de ramener la résolution de l'équation d'advection au système d'équations différentielles ordinaires couplées :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial X}{\partial \tau}(a,\tau) &=& c\left[\rho^{(L)}(a,\tau),X(a,\tau),\tau\right] \\ \frac{\partial \rho^{(L)}}{\partial \tau}(a,\tau) &=& f\left[\rho^{(L)}(a,\tau),X(a,\tau),\tau\right] \end{array}\right. \tag{18}$$

Ce point de vue du changement de variable conduit à la même méthode des caractéristiques qui permet de ramener une équations aux dérivées partielles à un système d'équations différentielles couplées. De manière condensée et avec des abus de notations, on peut résumer en disant que l'équation d'advection scalaire (aux dérivées partielles) se résoud en écrivant :

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{C}} = f(\rho,x,t) \quad \text{sur la courbe } \mathcal{C} \text{ d'équation} \quad \frac{dx}{dt} = c(\rho,x,t)\ . \tag{19}$$

2.4 Point de vue du système dynamique

Nous avons vu que la méthode des caractéristiques conduisant à la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires que l'on peut écrire sous la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{q} &=& c(p,q,t) \\ \dot{p} &=& f(p,q,t) \end{array}\right. \tag{20}$$

en notant $q=x$ et $p=\rho$. La théorie des systèmes dynamiques étudie les équations différentielles ordinaires couplées en considérant toutes les conditions initiales $[q(0),p(0)]=(q_0,p_0)$ possibles. Le plan (q,p) est appelé "espace des phases". Le vecteur (c,f) définit en tout point de cet espace peut être vu comme un champ de vitesse. Les solutions $[q(t),p(t)]$ sont naturellement appelées des trajectoires.

La résolution de l'équation d'advection scalaire $\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\,\frac{\partial \rho}{\partial x}=f$ avec sa condition initiale $\rho(x,0)=\rho_0(x)$ s'obtient en résolvant le système dynamique pour l'ensemble des conditions initiales décrivant la courbe $p_0 = \rho_0(q_0)$. À un instant t donné, la solution $\rho(x,t)$ s'obtient en décrivant l'ensembles des positions (états) $[q(t), p(t)]$ des trajectoires sous la forme d'une courbe $p = P_t(q)$ lorsque c'est possible. On a alors $\rho(x,t) = P_t(x)$. Mais il peut se faire que ce l'ensemble des positions ne puissent pas se mettre sous cette forme univaluée pour p mais sous la forme plus générale $F_t(p,q) = 0$ où plusieurs valeurs de p peuvent être associées à une seule valeur de q. Cette situation se produit lorsque plusieurs courbes caractéristiques se coupent dans le plan (x,t). L'équation d'advection scalaire cesse alors d'être valide dans la mesure où la solution n'est plus continue. Sur le plan de la physique décrite par le modèle, il faut spécifier des "relations de saut" pour décrire la dynamique de ces chocs. Sur le plan des mathématiques, la résolution du système dynamique est un moyen de prolonger la résolution de l'équation aux dérivées partielles au-delà du temps où apparaît le choc. Mais cette prolongation n'a pas forcément de sens pour le problème physique modélisé.

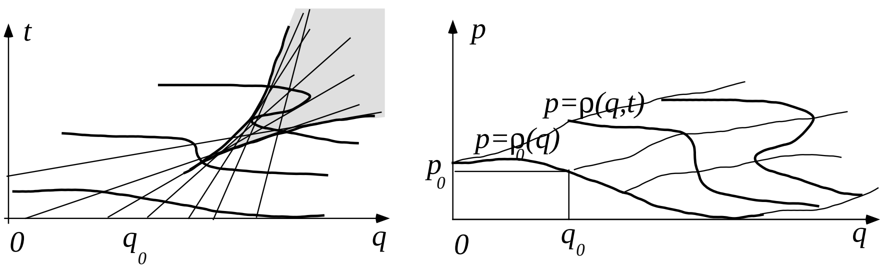

Figure 6: *Trajectoires du système dynamique et formation d'un choc*

3 Résolution de cas particuliers

On a donc présenté la méthode générale de résolution de l'équation d'advection d'un scalaire qui consiste à transformer l'équation aux dérivées partielles en un système d'équations différentielles ordinaires. Par abus de notation, ce système pourra s'écrire

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{q} & = & c(p,q,t) \\ \dot{p} & = & f(p,q,t) \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & c(\rho,x,t) \\ \dot{\rho} & = & f(\rho,x,t) \end{array}\right. \tag{21}$$

en distingant bien les notations $[x(t), \rho(t)]$ qui désignent les trajectoires du système dynamique et la notation $\rho(x,t)$ qui désigne le champ scalaire que l'on cherche à déterminer.

On suppose que la condition initiale $\rho(x,0) = \rho_0(x)$ est connue et l'on cherche le champ $\rho(x,t)$ pour tout temps. On doit donc trouver les trajectoires du système dynamique avec les conditions initiales $[q(0), p(0)] = (q_0, p_0)$ situées sur la courbe $p_0 = \rho_0(q_0)$. En utilisant les notations (x, ρ) pour le système dynamique, on cherche donc à résoudre l'ensemble des trajectoires $[x(t), \rho(t)]$ issues des conditions aux limites $[x(0), \rho(0)] = [a, \rho_0(a)]$.

On examine ici certains cas particuliers pour lesquels les courbes caractéristiques sont des droites ou des courbes parallèles. Ces cas particulier sont résumés dans le tableau **0**.1.

	c_0	$c(x)$	$c(\rho)$	$c(\rho, x, t)$
0	**3**.1	**3**.2	**3**.3	
$f(\rho, x, t)$	**3**.1	**3**.2		

Table 1: *Tableau des cas particuliers conduisant à des courbes caractéristiques parallèles ou droites*

3.1 Cas particulier $c = c_0$

Dans le cas où $c(\rho, x, t) = c_0$ est une constante, l'équation d'advection s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = f(\rho, x, t) \tag{22}$$

avec la condition initiale $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ et le système dynamique s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} &= c_0 \\ \dot{\rho} &= f(\rho, x, t) \end{cases} \tag{23}$$

avec les conditions initiales $[x(0), \rho(0)] = [a, \rho_0(a)]$. On en déduit alors

$$x = X(a, t) = a + c_0\, t \qquad \text{et} \qquad \dot{\rho} = f[\rho(t), a + c_0\, t, t] \; . \tag{24}$$

Les caractéristiques $\mathcal{C}_a$ sont donc des droites parallèles de pente $1/c_0$ dans le plan (x, t).

Dans le cas très particulier $f = 0$, la quantité ρ est invariante le long de ces droites caractéristiques et l'on peut écrire $\rho^{(L)}(a, t) = \rho_{\mathcal{C}_a}(t) = \rho_0(a)$. On en déduit $\rho(x, t) = \rho_0(x - c_0\, t)$ en utilisant la relation $a = A(x, t) = x - c_0\, t$ qui inverse la relation $x = X(a, t) = a + c_0\, t$. On vérifie alors que l'on a bien $\frac{\partial \rho}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$. Dans le cadre de la méthode des caractéristiques, la quantité invariante ρ est appellée “invariant de Riemann”.

Dans le cas général $f \neq 0$, la solution est $\rho(x, t) = \rho^{(L)}(x - c_0\, t, t)$ où $\rho^{(L)}(a, t) = \rho_{\mathcal{C}_a}(t)$ est obtenu en résolvant l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{\rho} = f[\rho(t), a + c_0\, t, t] \; . \tag{25}$$

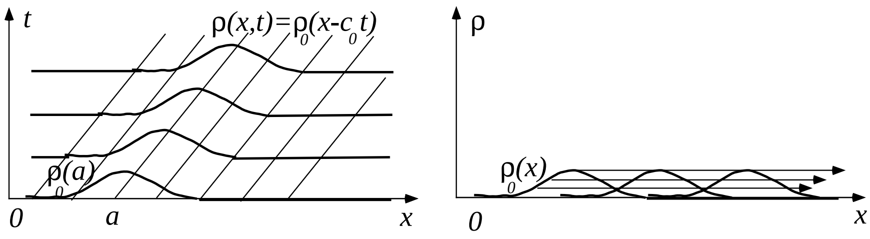

Figure 7: *Droites caractéristiques dans le cas c_0 constant et solutions $\rho(x,t) = \rho_0(x - c_0\, t)$ dans le cas $f = 0$.*

Sauf dans des cas particuliers où l'on peut trouver une résolution analytique, il faut recourir à une méthode numérique (par exemple avec un schéma de Runge-Kutta) pour résoudre cette équation. Dans le cadre de la méthode des caractéristiques la quantité $\rho_{\mathcal{C}_a}(t)$ ainsi trouvée est appellée "fonction de de Riemann".

3.2 Cas particulier $c = c(x)$

Dans le cas où $c(\rho, x, t) = c(x)$ ne dépend ni du temps ni de la variable ρ, l'équation d'advection s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(x)\, \frac{\partial \rho}{\partial x} = f(\rho, x, t) \tag{26}$$

avec la condition initiale $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ et le système dynamique s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} &= \quad c(x) \\ \dot{\rho} &= \quad f(\rho, x, t) \end{cases} \tag{27}$$

avec les conditions initiales $[x(0), \rho(0)] = [a, \rho_0(a)]$.

S'il existe des points a_i pour lesquels $c(a_i) = 0$, il existe alors des droites caractéristiques $\mathcal{C}_{a_i}$ d'équations $x = a_i$. Dans un intervalle ouvert délimités par ces points, la fonction $c(x)$ ne s'annule pas et on peut donc considérer la primitive de $1/c(x)$ définie par

$$\Theta(x) = \int_{x_*}^{x} \frac{1}{c(s)}\, ds \ , \tag{28}$$

où x_* est un point choisi au hasard dans cet intervalle. Cette primitive permet d'exprimer l'équation des courbes caractéristiques sous la forme

$$\Theta[x(t)] - \Theta(a) = t \qquad \Longleftrightarrow \qquad x(t) = \Theta^{-1}\left[\Theta(a) + t\right] \ , \tag{29}$$

où Θ^{-1} est l'inverse de la fonction Θ. Cet inverse existe sur l'intervalle considéré dans la mesure où sa dérivée $\frac{1}{c(x)}$ ne s'annule pas. On peut alors écrire

$$X(a,t) = \Theta^{-1}\left[\Theta(a) + t\right] \qquad \Longleftrightarrow \qquad A(x,t) = \Theta^{-1}\left[\Theta(x) - t\right] \ . \tag{30}$$

On remarque que les courbes caractéristique $\mathcal{C}_a$ se déduisent les unes des autres par des translations en temps dans le plan (x,t). En effet, on peut écrire $\Theta\left[x_2(t)\right] - \Theta\left[x_1(t)\right] = \Theta(a_2) - \Theta(a_1)$.

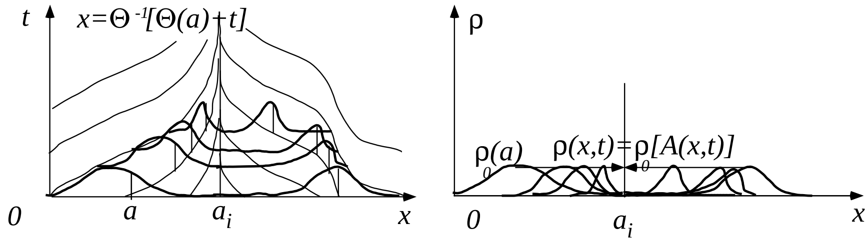

Figure 8: *Courbes caractéristiques dans le cas $c(x)$ indépendant de t et de ρ et solution $\rho(x,t) = \rho[A(x,t)]$ dans le cas particulier $f = 0$.*

Dans le cas très particulier $f = 0$, la quantité ρ est invariante le long des courbes caractéristiques (invariant de Riemann) et la solution sécrit $\rho(x,t) = \rho_0[A(x,t)] = \rho_0\left\{\Theta^{-1}\left[\Theta(x) - t\right]\right\}$.

Dans le cas général $f \neq 0$, on a $\rho(x,t) = \rho^{(L)}[A(x,t),t]$ où $\rho^{(L)}(a,t) = \rho_{\mathcal{C}_a}(t)$ est obtenu en résolvant l'équation :

$$\dot{\rho} = f\left[\rho(t), X(a,t), t\right] \tag{31}$$

avec $X(a,t) = \Theta^{-1}\left[\Theta(a) + t\right]$. La résolution de cette équation, comme le calcul et l'inversion de la fonction $\Theta(x)$, nécessitent, la plupart du temps, le recours à des méthodes numériques.

3.3 Cas particulier $c = c(\rho)$ et $f = 0$

Dans le cas où $c(\rho,x,t) = c(\rho)$ ne dépend ni du temps ni de l'espace mais seulement de la variable ρ et dans le cas très particulier où $f = 0$, l'équation d'advection s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho)\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \tag{32}$$

avec la condition initiale $\rho(x,0) = \rho_0(x)$ et le système dynamique s'écrit

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & c(\rho) \\ \dot{\rho} & = & 0 \end{array}\right. \tag{33}$$

avec les conditions initiales $[x(0), \rho(0)] = [a, \rho_0(a)]$.

Le long des courbes caractéristiques $\mathcal{C}_a$ d'équations $x = x(t)$ avec $x(t)$ solution du système pour $x(0) = a$, la quantité ρ est constante (invariant de Riemann) et égale à $\rho_0(a)$. On en déduit alors que ces caractéristiques sont des droites d'équation

$$x(t) = X(a, t) = a + c[\rho_0(a)]\, t \,. \tag{34}$$

Les intervalles en a pour lesquels la fonction $c[\rho_0(a)]$ croît avec a génèrent des droites caractéristiques qui ne se coupent pas pour $t > 0$. En revanche, ces caractéristiques se coupent si cette fonction est décroissante. Le mouvement 1D inverse $A(x, t)$ s'obtient en résolvant l'équation implicite

$$x = A(x, t) + c\left\{\rho_0\left[A(x, t)\right]\right\} \,. \tag{35}$$

Dans la région du plan (x, t) où les droites caractéristiques ne se coupent pas, cette équation implicite admet une solution unique. La solution de l'équation d'advection s'écrit alors $\rho(x, t) = \rho_0[A(x, t)]$. Dans la région du plan (x, t) où les droites caractéristiques se coupent, l'équation implicite conduit à plusieurs valeurs de a pour une couple (x, t) donné. Il n'est donc pas possible de définir une solution $\rho(x, t)$ monovaluée, sauf à ne considérer qu'une partie des caractéristiques. Ce choix ne peut se faire qu'en décrivant l'évolution d'un choc (discontinuité de ρ) dont la dynamique doit être décrite par une relation de saut venant compléter la modèlisation continue de l'équation d'advection. De part et d'autre de la trajectoire $x = X_c(t)$ du choc, on peut alors considérer que la solution $A(x, t)$ est celle qui correspond aux caractéristiques reliant (x, t) à $(a, 0)$ sans couper cette trajectoire.

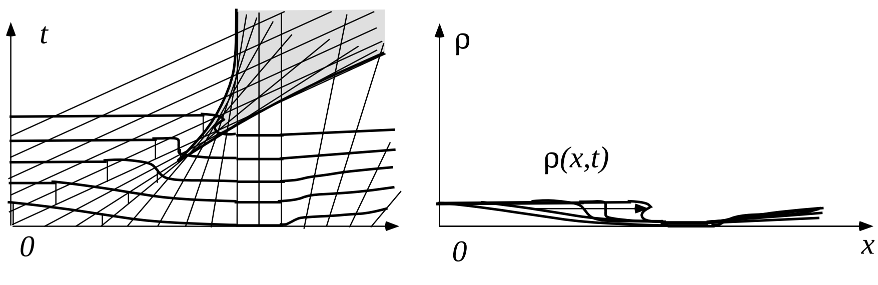

Figure 9: *Droites caractéristiques dans le cas où $c(\rho)$ ne dépend que de ρ et dans le cas particulier $f = 0$. Solution $\rho(x, t) = \rho_0[A(x, t)]$.*

Conclusion

Nous avons montré que la résolution de l'équation aux dérivées partielles suivante, appelée équation d'advection :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + c[\rho(x,t),x,t]\,\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,t) = f[\rho(x,t),x,t] \tag{36}$$

avec la condition initiale $\rho(x,0) = \rho_0(x)$ ou $\rho_{\mathcal{L}}(s)$ connu sur une courbe $\mathcal{L}$ d'équation $x = x_{\mathcal{L}}(s)$, se ramenait à la résolution du système dynamique

$$\begin{cases} \dot{x} = & c(\rho,x,t) \\ \dot{\rho} = & f(\rho,x,t) \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dot{q} = & c(p,q,t) \\ \dot{p} = & f(p,q,t) \end{cases} \tag{37}$$

avec les conditions initiales $[x(0),\rho(0)] = [a,\rho_0(a)]$ ou, le long d'une courbe $\mathcal{L}$, la condition $[x(s),\rho(s)] = [x_{\mathcal{L}}(s),\rho_{\mathcal{L}}(s)]$. Cette équivalence a été obtenue en remarquant que l'équation d'advection s'écrivait sous la forme de la dérivée $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{C}}(t) = f[\rho,x_{\mathcal{C}}(t),t]$ le long des courbes caractéristiques $\mathcal{C}$ d'équation $x = x_{\mathcal{C}}(t)$ et définies par $\dot{x} = c(\rho,x,t)$.

Dans le cas général, la détermination de ces courbes caractéristiques doit être couplée à celle de la solution $\rho(x,t)$. On peut interpréter cette méthode des caractéritiques en disant que ces courbes $\mathcal{C}$ "propagent l'information" contenue dans ρ. Lorsque $f = 0$, la grandeur ρ reste constante le long des caractéristique et est alors qualifiée "d'invariant de Riemann". Dans le cas général $f \neq 0$, cette grandeur est une "fonction de Riemann" et se caclule en résolvant l'équation différentielle $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\mathcal{C}} = f$.

La complexité des notations nécessaires pour présenter cette méthode peut être surmontée en remarquant que les courbes caractéristiques sont les trajectoires d'un mouvement 1D d'équation $x = X(a,t)$ dont la vitesse est $c[\rho(x,t),x,t]$ où $\rho(x,t)$ est la solution de l'équation d'advection. Une autre interprétation peut être suggérée à l'aide d'un mouvement, 2D cette fois, définit par le champ de vitesse $\underline{U}(q,p,t) = [c(p,q,t), f(p,q,t)]$ dans "l'espace des phases" (q,p). Les trajectoires de ce mouvement sont les solutions du système dynamique auquel on a réduit l'équation aux dérivées partielles.

Toujours pour comprendre la complexité des notations, il est utile d'interpréter la méthode des caractéristiques à l'aide du changement de variables $(a,\tau) = [A(x,t),t]$ équivalent à $(x,t) = [X(a,\tau),\tau]$ qui permet de transformer l'équation d'advection en un système plus simple. Dans le plan (x,t), ce changement de variable revient à passer d'un système de coordonnées cartésienne à un sytème de coordonnées curvilignes défini par les parallèles à l'axe des x (iso-τ) et les courbes caractéristiques (iso-a).

Plusieurs cas particuliers ont été examinés. Lorsque c_0 est une constante, les caractéristiques sont des droites parallèles. Lorsque $c(x)$ ne dépend que de x, les courbes caractéristiques se déduisent les unes des autres par une translation en temps. Ces deux cas appartiennent au cas linéaire où $c(x,t)$ ne dépend pas de ρ (on dit parfois quasi-linéaire lorsque c n'est pas constant). Dans ce cas, la superposition de deux solutions de l'équation d'advection (hors conditions initiales) est une nouvelle solution. Le cas où $c(\rho)$ ne dépend pas de x et de t est non linéaire et conduit à des caractéristiques qui sont des droites pas forcément parallèles. Cette situation permet de mettre facilement en évidence les limites de la méthode des caractéristiques qui n'est plus valable lorsque les caractéristiques se coupent.

Enfin, on peut généraliser toute cette étude au cas du système d'équations d'advection

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + c_i(\underline{\rho}, x, t)\, \frac{\partial \rho_i}{\partial x} = f_i(\underline{\rho}, x, t) \qquad \text{pour } i = 1, ..., N \tag{38}$$

où $\underline{\rho} \in I\!R^N$ est un vecteur $\underline{\rho} = (\rho_1, \rho_2, ..., \rho_N)$ à N composantes. Si toutes les fonctions $\rho_j(x,t)$ sauf une sont connues, il suffit de résoudre la fonction inconnue $\rho_i(x,t)$ en calculant les courbes caractéristiques $\mathcal{C}_i$ associée à son équation d'advection et en utilisant des conditions initiales ou des conditions spécifiée sur une courbe $\mathcal{L}$. Pour résoudre simultanément toutes fonctions $\rho_i(x,t)$, il faut considèrer les N familles de courbes caractéristiques $\mathcal{C}_i$ pour $i = 1, .., N$ est propager N conditions à partir d'une ou plusieurs courbes $\mathcal{L}$ ou conditions initiales.

On voit alors que la résolution de ce système d'équations aux dérivées partielles couplées se ramène à la résolution du système dynamique à $2N$ degrés de liberté

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x}_i = & c_i(\underline{\rho}, x_i, t) \\ \dot{\rho}_i = & f_i(\underline{\rho}, x_i, t) \end{array} \right. \qquad \text{pour } i = 1, ..., N \quad . \tag{39}$$

La méthode des caractéristiques pour résoudre un système équations aux dérivées partielles en (x,t) consiste à essayer de combiner les équations pour les mettre sous la forme (38). Lorsque cela est possible, on dit que le système est hyperbolique.