EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 0.1 Onde de crue de faible amplitude

On considère le modèle suivant pour une onde de crue de faible amplitude :

$$\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t} + \frac{3}{2}\, U(x)\, \frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x} = 0 \quad \text{avec} \quad U(x) = \frac{U_0}{1 + \lambda\, x} \tag{1}$$

où $\widetilde{h}(x,t)$ est la perturbation d'un profil d'équilibre de hauteur d'eau que l'on suppose associé au profil de vitesse $U(x)$ avec $U_0 > 0$ et $\lambda > 0$. On suppose que le domaine étudié est la demi-droite $x \geq 0$.

1) Donner l'expression des courbes caractéristiques de cette équation. Tracer ces courbes dans le quart de plan (x,t) avec $x \geq 0$ et $t \geq 0$.
2) Montrer que la distance $L(t) = x_2(t) - x_1(t)$ entre deux trajectoires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ décrivant deux courbes caractéristiques tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

On considère la condition aux limites $\widetilde{h}(0,t) = \widetilde{h}_*$ pour $t \geq 0$.

3) Indiquer la région du quart de plan (x,t) pour laquelle la solution peut être déterminée par la donnée de cette condition aux limites et tracer la partie connue du profil de crue $h(x,t)$ à des instants successifs.

On considère la condition initiale $\widetilde{h}(x,0) = \widetilde{h}_*\, [1 - \tanh(x/L_0)]$ pour $x \geq 0$ avec $\widetilde{h}_* \geq 0$ et $L_0 > 0$.

4) Montrer que l'on peut à présent déterminer la solution sur tout le quart de plan (x,t) et tracer schématiquement le profil de crue $h(x,t)$ à des instants successifs.

Corrigé page **??**

EXERCICE 0.2 Pluie et ondes de crue

On considère une portion de rivière de longueur L drainant un bassin versant soumis à une pluie uniforme représentée par une fonction $P(t)$. On suppose que la hauteur d'eau $h(x,t)$ de la rivière est régie par le modèle

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U_0\, \frac{\partial h}{\partial x} = P \tag{2}$$

où U_0 est une constante positive. On suppose que la hauteur d'eau en amont est constante et donnée par la condition aux limites $h(0,t) = h_0$.

On s'intéresse alors à la hauteur d'eau $h_e(t) = h(L,t)$ en aval de la portion de rivière en fonction du régime de pluie $P(t)$.

1) Calculer et tracer la solution stationnaire $h(x,t) = h_s(x)$ obtenue pour une pluie constante $P(t) = P_0$. On pourra noter $\gamma = P_0/U_0$.
2) On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$ le profil de hauteur d'eau est la solution stationnaire $h(x,0) = h_s(x)$ pour $x \in [0,L]$. On suppose que l'intensité de pluie est nulle pour $t \geq 0$. Monter que $h_e(t) = h_0$ pour $t \geq T$ avec $T = L/U_0$.
3) Tracer dans le plan (x,t) le lieu des points pour lesquels l'écoulement est uniforme.
4) Calculer et tracer l'évolution de la hauteur d'eau $h_e(t)$ en fonction du temps.
5) Calculer et tracer à plusieurs instants le profil de hauteur d'eau $h(x,t)$.
6) On suppose maintenant qu'à l'instant initial $t = 0$ la hauteur d'eau est uniforme et égale à $h(x,t) = h_0$ pour $x \in [0,L]$. On suppose une intensité de pluie constante $P(t) = P_0$ pour $t \geq 0$. Calculer et tracer l'évolution de la hauteur d'eau $h_e(t)$ en fonction du temps.
7) Calculer et tracer à plusieurs instants le profil de hauteur d'eau $h(x,t)$.

Corrigé page **??**

PROBLÈME 0.3 Modèle de crues rapides

En l'absence de pluie et d'infiltration dans le sol, la loi de conservation de la masse du ruisselement des eaux à la surface d'un plan incliné s'écrit

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hU) = 0 \tag{3}$$

où $h(x,t)$ est la hauteur de la lame d'eau et $U(x,t)$ sa vitesse moyenne.

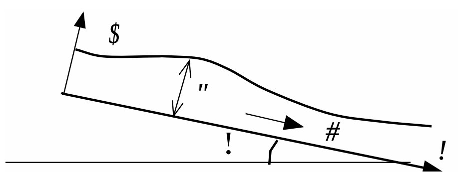

Figure 1: *Ruissellement d'une lame d'eau de hauteur h et de vitesse U sur une pente faisant un angle α avec l'horizontale.*

Tracé qualitatif d'un hydrogramme

On modélise le ruissellement le long du plan incliné par la loi :

$$U = K\,\sqrt{I}\;h^{\frac{2}{3}} \tag{4}$$

où h est la hauteur de la lame d'eau ruissellante, U sa vitesse moyennée sur la verticale et $I = \sin\alpha$ la “pente”. Le coefficient de “Strickler” K dépend du type de sol sur lequel s'effectue le ruissellement. On suppose ici qu'il est constant.

1) Une valeur du coefficient de Strickler sur un sol de type “prairie” est $K = 10$ en unités SI. Préciser cette unité en donnant la dimension de K.
2) Exprimer la loi de conservation de la masse en remplaçant U par son expression en fonction de $h(x,t)$.
3) On suppose qu'à $t = 0$ le profil de la surface libre $x \in [0, L]$ est égal à

$$h(x,0) = h_0(x) = h_*\,[1 - \cos(k\,x)] \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{\pi}{L} \tag{5}$$

   Dessiner cette condition initiale et l'interpréter physiquement en invoquant le régime des précipitations qui aurait pu précéder l'établissement d'une telle nappe d'eau de ruissellement.
4) Donner l'équation des courbes caractéristiques associées à cette condition initiale.
5) Sans faire de calculs, dessiner les profils $h(x,t)$ pour différents temps t_i positifs, en supposant que l'on a $h(0,t) = 0$ pour $t \geq 0$.
6) En déduire, toujours sans calcul, le tracé de l'hydrogramme $h(L,t)$ au bas de la pente.

Tracé quantitatif d'un hydrogramme

On considère le modèle de ruissellement

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \beta\,\frac{\partial}{\partial x}\left(h^{\frac{5}{3}}\right) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \beta > 0 \tag{6}$$

et la condition aux limites $h(0,t) = 0$ pour $t \geq 0$. On considère la condition initiale $h(x,0) = h_0(x)$ qui s'écrit

$$h_0(a) = h_*\,\left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{pour } a \in [0, l] \quad \text{et} \quad h_0(a) = h_* \;\text{ pour } a \in [l, L].$$

7) Donner l'équation des caractéristiques associées à cette condition initiale.
8) Calculer analytiquement la solution $h(x,t)$ pour $t \geq 0$.

9) Tracer la solution $h(x,t)$ pour des instants successifs t_i positifs.
10) En déduire l'hydrogramme $h(L,t)$ au bas de la pente et le tracer schématiquement.

Ruissellement en présence de pluie

On considère le modèle de ruissellement dans un bassin versant en présence de pluie décrit par l'équation

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{5}{3} U(h) \frac{\partial h}{\partial x} = P(t) \qquad \text{avec} \qquad U(h) = K \sqrt{I}\, h^{\frac{2}{3}} \tag{7}$$

et la condition aux limites $h(0,t) = 0$ pour $t \geq 0$. Le coefficient de Strickler K et la pente $I = \sin\alpha$ sont supposés constants. La fonction $P(t)$ modélise une pluie que l'on suppose homogène sur l'ensemble du bassin versant. On suppose que le sol est initialement sec, ce que l'on traduit par la condition initiale $h(x,0) = 0$.
Dans un premier temps, on suppose que $P(t) = P_0$ est constant.

11) Calculer l'équation des caractéristiques du modèle issues des points $(x,t) = (a,0)$ pour $a \in [0,L]$.
12) Calculer l'équation des caractéristiques issue des points $(x,t) = (0,\tau)$ pour $\tau \geq 0$.
13) Tracer toutes les courbes caractéristiques du modèle dans la région $(x,t) \in [0,L] \times I\!R_+$.
14) Calculer l'intersection de la courbe caractéristique issue du point $(x,t) = (0,0)$ avec la droite d'équation $x = L$.
15) En déduire le temps t_* au-delà duquel l'hydrogramme $h(L,t)$ devient constant.
16) Calculer l'expression de cette valeur constante h_*.
17) Calculer numériquement, même de manière très grossière, les valeurs de t_*, en nombre de jours, et de h_*, en mm, pour une pluie P_0 de 1 mm par jour, un longueur L de 10 km, une pente $I = 0,1$ et un nombre de Strickler de $K = 10$ en unité SI.
18) Exprimer et tracer l'hydrogramme de crue $h(L,t)$ au bas de la pente.

On suppose maintenant que $P(t) = P_0$ pour $t \in [0, t_0]$ et $P(t) = 0$ pour $t \geq t_0$ avec $t_0 \geq L^{\frac{3}{5}}\, K^{-\frac{3}{5}}\, I^{-\frac{3}{10}}\, P_0^{-\frac{2}{5}}$.

19) Tracer l'hydrogramme de crue associé à cette pluie.

Corrigé page **??**