

CORRIGÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

Corrigé 0.1 Modèles de l'équation de Burgers

1) Le bilan local est $\partial_t u + \frac{1}{2} \partial_x (u^2) = \partial_t u + u \partial_x u = 0$. La relation de saut est $-w[[u]] + \frac{1}{2} [[u^2]] = 0$. 2) La vitesse du choc est $w = \frac{1}{2} \frac{u_2^2 - u_1^2}{u_2 - u_1} = \frac{1}{2} (u_1 + u_2)$. C'est la moyenne des vitesses u_1 et u_2 . 3) Le bilan local est $\partial_t (u^2) + \frac{2}{3} \partial_x (u^3) = 2u(\partial_t u + u \partial_x u) = 0$. La relation de saut est $-w[[u^2]] + \frac{2}{3} [[u^3]] = 0$. La vitesse du choc est $w = \frac{3}{2} \frac{u_1^3 - u_2^3}{u_1^2 - u_2^2} = \frac{2}{3} \frac{u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2}{u_1 + u_2}$. 4) Les deux modèles correspondent au même bilan local mais diffèrent par leurs relations de saut. La vitesse du choc n'est donc pas la même. 5) Dans le cas continu, la formule de Leibnitz entraîne $\int_{x_1}^{x_2} \partial_t u \, dx + \frac{1}{2} [u^2]_{x_1}^{x_2} = 0$. Le bilan local est donc $\partial_t u + u \partial_x u = 0$. 6) Dans le cas discontinu, la formule de Leibnitz entraîne $\int_{x_1^-(t)}^{x_2^-(t)} \partial_t u \, dx + \int_{x_1^+(t)}^{x_2^+(t)} \partial_t u \, dx - w[[u]] + \frac{1}{2} [u^2]_{x_1}^{x_2} = 0$. Comme $[u^2]_{x_1}^{x_2(t)} = [u^2]_{x_1^-(t)}^{x_2^-(t)} + [u^2]_{x_1^+(t)}^{x_2^+(t)} + [[u^2]]$, la relation de saut est $-w[[u]] + \frac{1}{2} [[u^2]] = 0$. Ce modèle est identique au premier modèle.

Corrigé 0.2 Ondes de crues non linéaires

1) La première équation traduit la conservation de la masse. La deuxième équation provient de la loi de conservation de la quantité de mouvement projetée sur l'axe x dans laquelle l'accélération ainsi que le gradient de pression sont négligés. Seul l'équilibre entre la force de gravité et le frottement subsistent. 2) En remplaçant $U = \sqrt{\frac{2gh \sin \alpha}{C_f}} = \kappa h^{\frac{1}{2}}$ dans l'équation de continuité, on obtient $\frac{\partial h}{\partial t} + \kappa \frac{\partial}{\partial x} (h^{\frac{2}{3}}) = 0$. 3) La loi de conservation de la masse sous forme intégrale s'écrit $\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b h \, dx + (hU)|_b - (hU)|_a = 0$. On remplaçant U par son expression en fonction de h on obtient $\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b h \, dx + q(h)|_b - q(h)|_a = 0$ avec $q(h) = \kappa h^{\frac{2}{3}}$. 4) On déduit de la formulation intégrale du modèle l'équation de bilan local $\frac{\partial h}{\partial t} + c(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0$ avec $c(h) = q'(h) = \frac{2}{3} \kappa h^{\frac{1}{2}}$ avec $q(h) = \kappa h^{\frac{2}{3}}$. La réciproque n'est pas vraie sauf si l'on ajoute la relation de saut $-w[[h]] + [[q]] = 0$. 5) Les caractéristiques sont des droites d'équation $x = X + c[h(X, 0)] t$. 6) Comme $c(h)$ est croissante et $h(x, 0)$ décroissante, l'information "hautes eaux" rattrape l'information "basses eaux" : les caractéristiques se coupent et il se forme un ressaut hydraulique. 7) L'invariant de Riemann est $r(h) = h$. L'extension spatiale du profil (initialement de l'ordre de $1/k$) diminue linéairement avec le temps jusqu'à la formation du ressaut. 8) La vitesse de propagation du ressaut hydraulique est $w = [[q]]/[[h]]$. Longtemps après la formation du ressaut, la hauteur en amont du ressaut tend

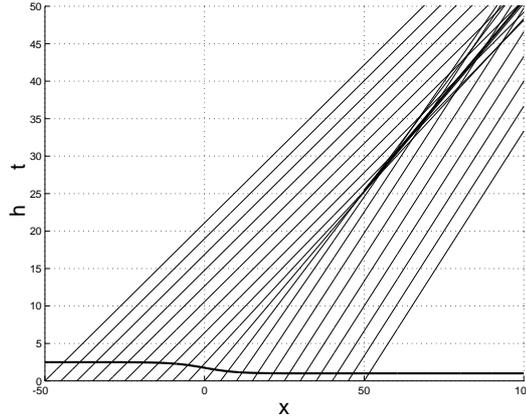


Figure 1: Droites caractéristiques et ressaut dans le plan (x, t) pour la condition initiale $h(x, 0)$.

vers $h_0 + \Delta h$ et la hauteur en aval vers h_0 . La vitesse du ressaut tend donc vers $w = \kappa \left[(h_0 + \Delta h)^{3/2} - h_0^{3/2} \right] / \Delta h$. L'application numérique conduit à $w = \frac{(2.25)^{3/2} - 1}{1.25} = \frac{(9/4)^{3/2} - 1}{(5/4)} = \frac{(27/8 - 1)}{(5/4)} = 1.9$ m/s. **9)** Une crue d'environ 1 m sur un rivière de 1 m de profondeur coulant à 1 m/s ne semble pas dangereuse si l'eau monte progressivement. Mais lorsqu'il se forme un ressaut d'environ 1 m se propageant à une vitesse d'environ 2 m/s, les effets dévastateurs peuvent être importants. L'approximation des ondes de crues permet de modéliser simplement ce phénomène.

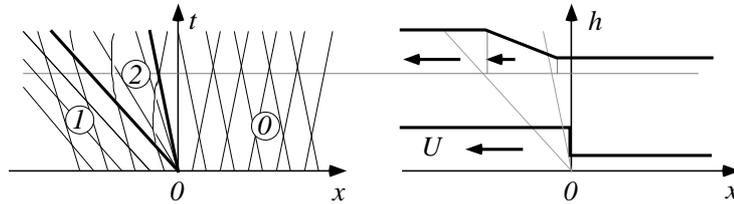
Corrigé 0.3 Vidange par contrôle de la vitesse

1) Le tracé est identique à celui obtenu en imposant une décroissance linéaire de $c_e(t)$ avec $c_e = \sqrt{g h_e}$. **2)** En suivant une courbe caractéristique \mathcal{C}_2 connectant la région uniforme 0 $(h, U) = (h_0, 0)$ à la région uniforme f $(h, U) = (h_f, U_f)$, l'invariance de $J_2 = U - 2c$ entraîne $U_f - 2c_f = -2c_0$ avec $c_f = \sqrt{g h_f}$. On en déduit $c_f = \frac{1}{2}U_f + c_0$. **3)** Les droites \mathcal{C}_1 d'élimentant l'onde simple ont respectivement pour équation $x = c_0 t$ et $x = (U_f + c_f)(t - t_f) = \left(\frac{3}{2}U_f + c_0\right)(t - t_f)$. **4)** On en déduit que $L(t) = \left(\frac{3}{2}U_f + c_0\right)t_f - \frac{3}{2}U_f t$. **5)** L'invariance de $J_2 = U - 2c$ entraîne $U_e(t) - 2c_e(t) = -2c_0$ avec $c_e = \sqrt{g h_e}$ et $h_e(t) = h(0, t)$. Pour $t \leq t_f$, on a donc $c_e(t) = \frac{1}{2}U_e(t) + c_0$. Pour $t \geq t_f$, on a $c_e(t) = c_f$. **6)** L'équation de la \mathcal{C}_1 passant par $(0, \tau)$ dans l'onde simple est $x = [U_e(\tau) + c_e(\tau)](t - \tau) = \left(\frac{3}{2}U_f + c_0\right)(t - \tau)$. **7)** La \mathcal{C}_1 qui passe par (x, t) dans l'onde simple, coupe l'axe des t en $\tau(x, t) =$

$\frac{1}{3\beta} \left[-\left(c_0 - \frac{3}{2}\beta t\right) + \sqrt{\left(c_0 + \frac{3}{2}\beta t\right)^2 + 6\beta x} \right]$. Comme U et h sont constants le long d'une \mathcal{C}_1 de l'onde simple, on a $U(x, t) = \beta \tau(x, t)$ et $c(x, t) = c_e[\tau(x, t)] = \frac{1}{2}\beta \tau(x, t) + c_0$. **8)** Si $U_f = -\frac{2}{3}c_0$ la \mathcal{C}_1 issue de $(0, t_f)$ est confondue avec l'axe de t . Mais il n'est pas possible d'imposer une vitesse plus grande en valeur absolue. En effet, dès qu'une \mathcal{C}_1 devient confondue avec l'axe des t , il n'est plus possible d'imposer de condition aux limites en $x = 0$. Ce sont en effet les valeurs constantes le long de la \mathcal{C}_1 qui prévalent.

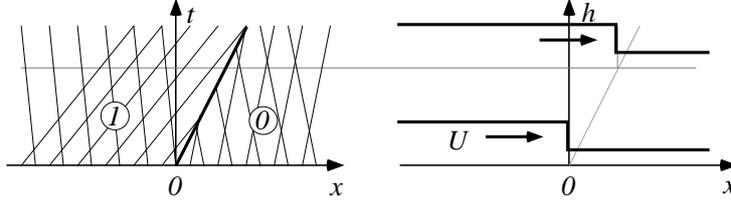
Corrigé 0.4 Intumescences non linéaires

1) Les courbes caractéristiques sont définies par les équations $\frac{dx}{dt} = U + \sqrt{gh}$ pour les \mathcal{C}_1 et $\frac{dx}{dt} = U - \sqrt{gh}$ pour les \mathcal{C}_2 . Les invariants de Riemann sont $J_1(h, U) = U + 2\sqrt{gh}$ et $J_2 = U - 2\sqrt{gh}$. On a $J_1 = 0$ pour tout (x, t) dans la mesure c'est le cas sur toute la droite $t = 0$ et où les caractéristiques \mathcal{C}_1 propagent cette information dans tout le demi-plan. **2)** Si on suppose que la région 0 est caractérisée par l'écoulement uniforme $(h, U) = (h_0, U_0)$, la caractéristique \mathcal{C}_2 issue de $(0, 0)$ est la demi-droite d'équation $x = (U_0 - c_0)t = -3c_0 t$. Comme $J_1 = 0$ partout, cette situation est compatible avec l'information propagée par les caractéristiques \mathcal{C}_1 provenant des autres régions. C'est donc la solution. **3)** L'onde centrée (région 2) est délimitée par les droites $x = (U_1 - c_1)t = -3c_1 t$ et $x = -3c_0 t$ avec $c_1 = \sqrt{gh_1}$. La région 1 située à droite correspond à l'écoulement uniforme $h = h_1$ et $U = U_1 = -2c_1$.



4) Un point (x, t) situé dans la région 2 (onde centrée) et situé sur la droite d'équation $x = (U - \sqrt{gh})t$ le long de laquelle U et h sont constant (démonstration classique de l'onde simple adjacente à une région d'écoulement uniforme dans le cas où il existe des invariants de Riemann). En considérant la courbe \mathcal{C}_1 qui passe par (x, t) , on peut affirmer que $J_1 = U + 2\sqrt{gh} = 0$. En notant $c = \sqrt{gh}$, le système $U - c = \frac{x}{t}$ et $U + 2c = 0$ se résout en $c = \frac{-x}{3t}$ donc $h(x, t) = \frac{x^2}{9gt^2}$ et $U(x, t) = \frac{2x}{3t}$. Le profil de hauteur d'eau est donc parabolique dans la région 2 tandis que le profil de vitesse est linéaire. **5)** La largeur de l'intumescence est donc $L(t) = 3(c_1 - c_0)t = 3(\sqrt{gh_1} - \sqrt{gh_0})t$. Cette largeur croît linéairement avec le temps. **6)** Les équations de sauts entre les régions 1 et 0 s'écrivent $h_1(U_1 - w) = -h_0 w$ et $h_1 U_1(U_1 - w) + \frac{1}{2}g h_1^2 = \frac{1}{2}g h_0^2$.

7) On en déduit $w = \frac{h_1}{h_1-h_0} U_1 = \sqrt{\frac{g(h_1+h_0)}{2}} \frac{h_1}{h_0}$. La deuxième relation s'écrit $h_1 U_1^2 \left(1 - \frac{h_1}{h_1-h_0}\right) = \frac{1}{2}g (h_0^2 - h_1^2)$, ou encore $U_1^2 \frac{h_0 h_1}{h_1-h_0} = \frac{1}{2}g (h_1^2 - h_0^2)$. On retrouve alors la valeur de $U_1 = \sqrt{\frac{g(h_1-h_0)^2(h_1+h_0)}{2 h_1 h_0}}$ de l'énoncé. 8) La solution est donc modélisée par un choc centrée.



9) Dans le cas $U_1 = 0$, la solution est constituée d'une onde centrée se propageant vers la gauche et d'un choc droit se propageant vers la droite. L'écoulement uniforme central $(h, U) = (h_3, U_3)$ constitue la région 3, délimitée par les droites $x = (U_3 - c_3)t$ et $x = wt$ où $c_3 = \sqrt{gh_3}$ et $w = \frac{h_3}{h_3-h_0}U_3$ est la vitesse du choc. Le long des courbes caractéristiques \mathcal{C}_1 qui connectent les régions 1 et 3, la valeur de l'invariant de Riemann $J_1 = U + 2\sqrt{gh}$ est $J_1 = 2\sqrt{gh_1} = U_3 + 2\sqrt{gh_3}$. On en déduit que $U_3 = 2(\sqrt{gh_1} - \sqrt{gh_3})$. D'autre part, les relations de saut au travers du choc centrée entraînent que $U_3 = \sqrt{\frac{g(h_3-h_0)^2(h_3+h_0)}{2 h_0 h_3}}$. En simplifiant par \sqrt{g} l'expression de U_3 , on déduit que $2(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_3}) = \sqrt{\frac{(h_3-h_0)^2(h_3+h_0)}{2 h_0 h_3}}$. En résolvant cette équation implicite, on peut obtenir la solution en tout point du demi-plan (x, t) . En particulier, le profil spatial de vitesse est linéaire dans la région 2 de l'onde centrée et le profil spatial de hauteur d'eau est quadratique.

