

COURS ÉCRIT

1	Modèle simple du trafic routier	2
2	Équations aux dérivées partielles hyperboliques	7
3	Détentes, ressauts et relations de sauts	16

Introduction

De nombreux modèles physiques, en particulier en mécanique des fluides, sont présentés sous la forme d'équations aux dérivées partielles (EDP). Ces équations proviennent très souvent bilan globaux traduisant des axiomes de la mécanique ainsi que des “paramétrisations” traduisant en lois des phénomènes observés dans la nature.

Il est alors intéressant d'examiner aux propriétés mathématiques de ces systèmes d'EDP linéaires ou non linéaires (coefficients dépendant de la solution), en essayant de regrouper en grandes familles celles qui ont des propriétés communes. Une classification importante consiste à identifier les classes des systèmes “hyperboliques”, “paraboliques”, “elliptiques” ou “mixtes”. Nous restreignons ici la présentation au cas des EDP ne dépendant que de deux variables. Il peut s'agir d'une variable d'espace x et d'une variable de temps t , dans le cas d'un système unidimensionnel (1D) instationnaire, ou de deux variables d'espace (x, y) dans le cas bidimensionnel (2D) stationnaire. La généralisation aux cas de systèmes dépendant de plus de deux variables existe mais n'est pas abordée ici.

Nous nous concentrons ici sur les systèmes “hyperboliques” en privilégiant l'exemple des équations de Saint Venant 1D instationnaires décrivant la dynamique d'une lame d'eau peu profonde à surface libre dans un canal. Les concepts présentés dans l'étude de cet exemple sont facilement généralisables à de nombreux autres systèmes hyperboliques.

Les systèmes d'EDP hyperboliques ont la particularité de pouvoir se transformer en un système d'équations différentielles faisant intervenir la dérivation des solutions le long de courbes caractéristiques dont le tracé dépend lui-même des solutions. Cette transformation permet une interprétation géométrique des solutions le plan (x, t) ou (x, y) des variables et conduit très souvent à des résolutions analytiques ou numériques.

La résolution des EDP hyperboliques par la "méthode des caractéristiques" met en évidence les limitations de l'approche continue de ces équations dans de nombreux cas. Ceci se traduit géométriquement par le fait que les courbes caractéristiques se coupent. D'un point de vue physique, cette situation traduit le fait que les hypothèses sur lesquelles reposent la modélisation ne sont plus valides dans certaines régions de l'espace. Très souvent, la nature hyperbolique des équations repose sur le fait que l'on a négligé des processus de dissipation faisant intervenir des dérivées d'ordre plus élevées (deux dans le cas d'un opérateur Laplacien par exemple). Lorsque la solution commence à présenter des variations importantes sur des échelles spatiales réduites, ces processus dissipatifs doivent être pris en compte. Mais à défaut de vouloir les introduire, on peut continuer à utiliser le système d'EDP hyperboliques en permettant l'existence de solutions discontinues et en le complétant par une modélisation de ces chocs. Cette modélisation nécessite donc l'introduction de "relations de saut" qui ne sont pas contenues dans le système d'EDP continues. Pour les formuler sur une base physique, il faut revenir aux bilans globaux traduisant les axiomes de la mécanique. Pour détailler la nécessité de combiner les bilans locaux, traduisant l'approche continue sous forme d'EDP, avec les relations de saut, issues de la formulation de bilans globaux, nous débutons la présentation par l'exemple d'un modèle simple du trafic routier.

1 Modèle simple du trafic routier

On présente ici un modèle de trafic routier dont la simplicité permet une bonne introduction des concepts de caractéristiques et de chocs. Ce modèle assimile le trafic routier à un fluide compressible 1D instationnaire. Nous allons voir que le modèle doit être défini par une équation de bilan global si l'on veut déterminer le comportement d'éventuels chocs. Cette équation de bilan global contient l'équation aux dérivées partielles (bilan local) mais aussi une relation de saut qui traite des discontinuités. Le concept de caractéristiques est particulièrement simple pour ce modèle et on montre comment calculer la vitesse de propagation d'un choc.

1.1 Du bilan global au bilan local

On considère que la fonction $\rho(x, t)$ est la densité d'automobile sur une route (nombre par unité de longueur) et on note $Q(\rho)$ le flux d'automobile supposé fonction (continue) de ρ uniquement. Pour fixer les idées, supposons que $V(\rho) = V_{\max} (1 - \rho^2/\rho_{\max}^2)$ modélise la vitesse des véhicules qui décroît avec la densité ρ du trafic. Le flux est alors $Q(\rho) = \rho V(\rho) = V_{\max} (\rho - \rho^3/\rho_{\max}^2)$. Il est maximal pour $\rho_* = \rho_{\max}/\sqrt{3} \sim 0.6 \rho_{\max}$.

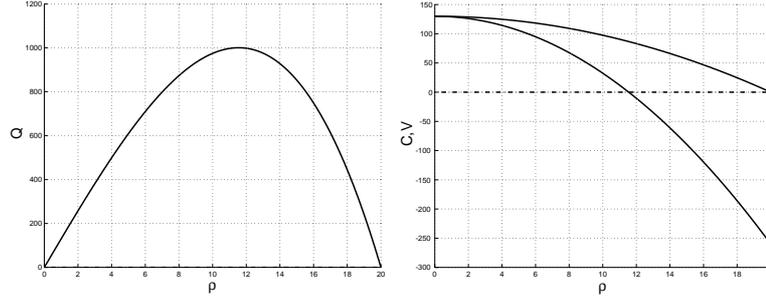


Figure 1: (a) Flux de véhicules $Q(\rho)$. (b) Vitesses des véhicules $V(\rho)$ et vitesse d'advection $C(\rho) = Q'(\rho)$ des fluctuations de la densité de véhicules ρ .

Le bilan global exprimant la conservation du nombre de véhicules s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho \, dx + [Q(\rho)]_{x_1}^{x_2} = 0 \quad (1)$$

pour tout intervalle fixe $[x_1, x_2]$, avec la notation $[f]_{x_1}^{x_2} = f(x_2) - f(x_1)$.

On en déduit facilement que les solutions $\rho(x, t)$ continues dérivables vérifient l'équation de "bilan local"

$$\partial_t \rho + \partial_x Q(\rho) = 0 \quad (2)$$

où ∂_t et ∂_x désignent respectivement les dérivées partielles par rapport au temps et à l'espace.

On définit la vitesse $C(\rho) = Q'(\rho) = V_{\max} (1 - 3\rho^2/\rho_{\max}^2)$ et l'on écrit l'équation de bilan local sous la forme

$$\partial_t \rho + C(\rho) \partial_x \rho = 0. \quad (3)$$

On voit alors que le long d'une courbe $x(t)$ définie par l'équation $\frac{dx}{dt}(t) = C\{\rho[x(t), t]\}$, plus simplement notée $\dot{x} = C(\rho)$, la grandeur $\rho[x(t), t]$ reste constante (vérification en reportant dans l'équation).

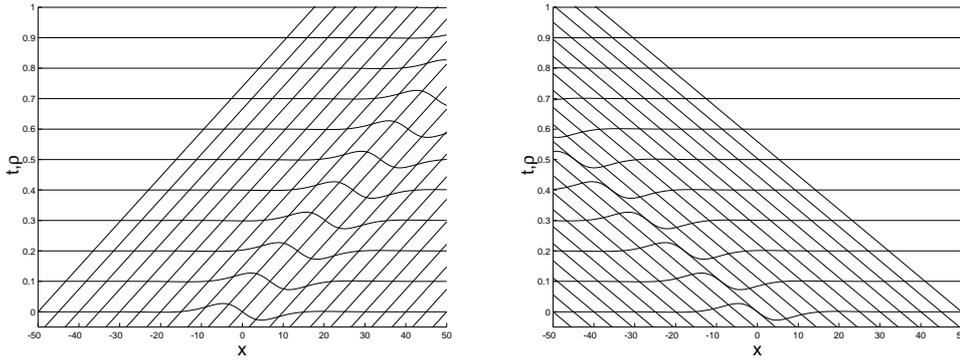


Figure 2: Propagation d'un coup de frein (a) $\rho_0 = 0.4$ $\rho_{\max} < \rho_*$ (b) $\rho_0 = 0.75$ $\rho_{\max} > \rho_*$.

On dit que les courbes définies par $\dot{x} = C(\rho)$ dans l'espace (x, t) sont les “caractéristiques” de l'équation de bilan et que “l'invariant de Riemann” le long d'une telle caractéristique est la grandeur ρ . Pour cet exemple particulier d'équation, les caractéristiques sont toujours des droites. En effet, comme ρ est constant le long d'une caractéristique, $C(\rho)$ l'est aussi.

La linéarisation $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$ de l'équation de bilan local autour de l'état de base $\rho = \rho_0$ conduit ($\tilde{\rho}$ petit devant ρ_0) à l'équation

$$\partial_t \tilde{\rho} + C(\rho_0) \partial_x \tilde{\rho} = 0 \quad (4)$$

La relation de (non-)dispersion $\omega = C(\rho_0) k$ met en évidence des ondes (en notation complexe) $\tilde{\rho} = \rho_m \exp(ikx - i\omega t)$ qui se propagent à la vitesse $C(\rho_0)$.

On peut donc voir les caractéristiques comme des rayons dont la vitesse prend en compte les variations de ρ dans le cas où les termes non-linéaires ne peuvent plus être négligés.

1.2 Ondes de détente et méthode des caractéristiques

Pour fixer les idées, on suppose que $C(\rho)$ est une fonction monotone décroissante de ρ comme dans l'exemple particulier considéré.

On considère une condition initiale $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ telle que $\rho_0(x) = \rho_g$ pour $x \leq x_g$ (Gauche) et $\rho_0(x) = \rho_d$ pour $x \geq x_d$ (Droite). Dans l'intervalle $[x_g, x_d]$, on suppose que $\rho_0(x)$ relie continuellement de façon monotone les valeurs ρ_g et ρ_d .

On suppose $\rho_g > \rho_d$: la circulation devient donc de plus en plus fluide. Les deux hypothèses entraînent que la fonction $C_0(x) = C[\rho_0(x)]$ est strictement

décroissante.

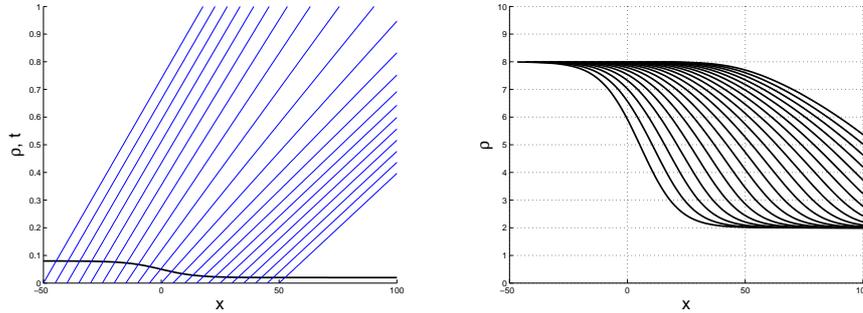


Figure 3: Onde de détente $\frac{\rho_g}{\rho_{\max}} = 0.75$ et $\frac{\rho_d}{\rho_{\max}} = 0.4$. a) Condition initiale est droites caractéristiques. b) Solution $\rho(x, t)$ à des instants successifs.

Une représentation graphique (figure 3) du calcul de la solution $\rho(x, t)$ issue de la condition initiale $\rho_0(x)$ est obtenue en traçant toutes les caractéristiques dans le plan (x, t) . A gauche du plan se trouvent les caractéristiques d'équations $x = a + C(\rho_g)t$ avec $a \leq x_g$ tandis que l'on trouve à droite les caractéristiques d'équation $x = a + C(\rho_d)t$ avec $a \geq x_d$. Entre ces deux familles se trouvent les droites d'équation $x = a + C[\rho_0(a)]t$ avec $a \in [x_g, x_d]$. Aucune de ces droites ne se coupent du fait que $C_0(x)$ est croissante. On dit que l'on est en présence d'une onde de détente.

Dans la limite où $x_g = x_d = 0$, la condition initiale $\rho_0(x)$ est discontinue. La solution $\rho(x, t)$ est cependant continue, et s'obtient en traçant un faisceau de droites caractéristiques centrées en $(x, t) = (0, 0)$. On dit que l'on est en présence d'une onde de détente centrée.

1.3 Ondes de compression et relation de saut

On suppose maintenant que $\rho_g < \rho_d$: la circulation devient donc de moins en moins fluide. La fonction $C_0(x) = C[\rho_0(x)]$ est alors strictement décroissante. Pour les temps courts, le calcul de la solution $\rho(x, t)$ s'effectue comme précédemment en traçant les caractéristiques. Mais ces droites se coupent (figure 4). Leur enveloppe décrit deux courbes entre lesquelles est comprise la trajectoire d'un choc.

Pour calculer la vitesse de ce choc, il faut considérer l'équation de bilan global qui s'applique à des fonctions $\rho(x, t)$ admettant une discontinuité en un point mobile $x_c(t)$ animé d'une vitesse $w = \dot{x}_c$. On note alors $[[\rho]] = \rho_D - \rho_G$ le saut entre les valeurs situées à droite $\rho_D(t)$ et à gauche $\rho_G(t)$ du choc.

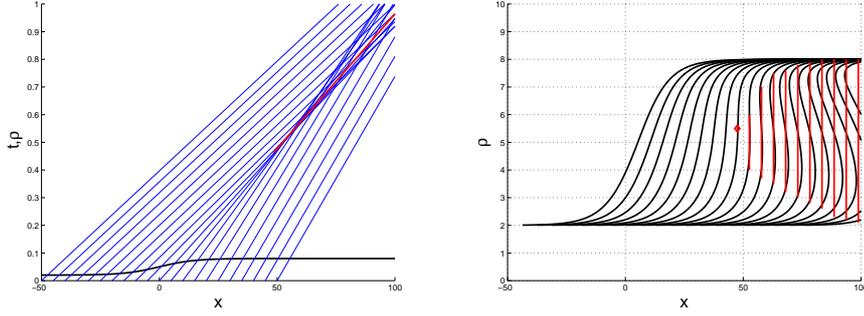


Figure 4: Formation d'un choc $\frac{\rho_g}{\rho_{\max}} = 0.4$ et $\frac{\rho_d}{\rho_{\max}} = 0.75$.

a) Condition initiale est droites caractéristiques. b) Solution $\rho(x, t)$ à des instants successifs.

On montre alors que la solution discontinue $\rho(x, t)$ vérifie la relation de saut

$$-w[[\rho]] + [[Q(\rho)]] = 0 . \quad (5)$$

En effet, la formule de Leibnitz permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho dx &= \frac{d}{dt} \left[\int_{x_1}^{x_c^-(t)} \rho dx + \int_{x_c^+(t)}^{x_2} \rho dx \right] \\ &= \int_{x_1}^{x_c^-(t)} \partial_t \rho dx + \int_{x_c^+(t)}^{x_2} \partial_t \rho dx + \dot{x}_c(t) \rho_G(t) - \dot{x}_c(t) \rho_D(t) \\ &= \int_{x_1}^{x_c^-(t)} \partial_t \rho dx + \int_{x_c^+(t)}^{x_2} \partial_t \rho dx - w [[\rho]] . \end{aligned} \quad (6)$$

D'autre part, on peut écrire

$$\begin{aligned} [Q]_{x_1}^{x_2} &= Q[\rho(x_2, t)] - Q[\rho(x_1, t)] \\ &= [Q]_{x_1}^{x_c^-} + [Q]_{x_c^+}^{x_2} - Q[\rho_G(t)] + Q[\rho_D(t)] \\ &= [Q]_{x_1}^{x_c^-} + [Q]_{x_c^+}^{x_2} + [[Q]] . \end{aligned} \quad (7)$$

En sommant les équations (6) et (7) et en appliquant le bilan global (1) sur les intervalles $[x_1, x_c[$ et $]x_c, x_2]$ on trouve bien que la vitesse du choc est

$$w = \frac{[[Q(\rho)]]}{[[\rho]]} , \quad (8)$$

les valeurs de part et d'autre du choc étant connues grâce aux caractéristiques.

Pour l'exemple particulier considéré, on note K le point (x_K, t_K) à partir duquel le choc prend naissance, et $x = x_c(t)$ pour $t \geq t_K$ l'équation de sa

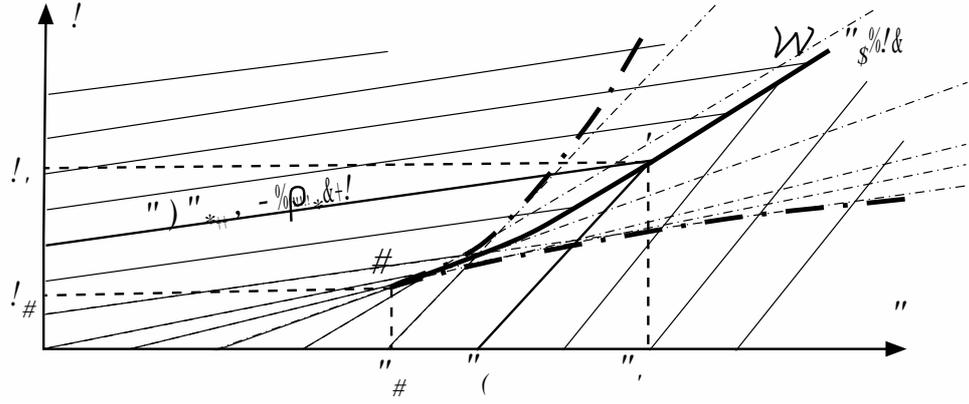


Figure 5: Trajectoire \mathcal{W} d'équation $x = x_c(t)$ du choc. Naissance du choc en K de coordonnées (x_K, t_K) . A partir du point I de coordonnées (x_I, t_I) , la vitesse du $w = \dot{x}_c(t)$ est constante.

trajectoire \mathcal{W} . Dans la mesure où $\rho_0(x) = \rho_g$ pour $x \leq x_g$ et $\rho_0(x) = \rho_d$ pour $x \geq x_d$ sont constants à l'extérieur de l'intervalle $[x_g, x_d]$, on voit qu'à partir du point I situé à l'intersection des droites $x = x_g + c(\rho_g)t$ et $x = x_d + c(\rho_d)t$, ce qui définit ses coordonnées (x_I, t_I) , le choc est animé d'une vitesse constante

$$w = \frac{Q(\rho_D) - Q(\rho_G)}{\rho_D - \rho_G} = \frac{Q(\rho_d) - Q(\rho_g)}{\rho_d - \rho_g}. \quad (9)$$

En effet, après le temps t_I , les points (x, t) de la trajectoire \mathcal{W} du choc sont à l'intersection d'une caractéristique $x = a_g + C(\rho_g)t$ avec $a_g < x_d$ provenant de la région uniforme de gauche et d'une caractéristique $x = a_d + C(\rho_d)t$ avec $x_d < a_d$ provenant de la région uniforme de droite. On a donc $(\rho_G, \rho_D) = (\rho_g, \rho_d)$

La forme de la trajectoire du choc \mathcal{W} entre les points K et I dépend de la forme de la fonction $\rho_0(x)$ dans l'intervalle $[x_g, x_d]$.

Lorsque $x_g = x_d = 0$, on voit que $x_I = 0$ et $t_I = 0$. On est alors en présence d'un "choc centrée" animé de la vitesse constante $w = \frac{Q(\rho_d) - Q(\rho_g)}{\rho_d - \rho_g}$.

2 Équations aux dérivées partielles hyperboliques

De nombreux modèles physiques unidimensionnels (1D) instationnaires (variables t et x) ou bidimensionnels (2D) (variables x et y) peuvent se mettre sous la forme $(\underline{A} \partial_t + \underline{B} \partial_x) \underline{U} = \underline{D}$ ou $(\underline{A} \partial_x + \underline{B} \partial_y) \underline{U} = \underline{D}$ où les coefficients des

On considère les équations de Saint Venant 1D qui s'écrivent

$$\begin{aligned} \partial_t h + U \partial_x h + h \partial_x U &= 0 \\ \partial_t U + U \partial_x U + g' \partial_x h &= g \sin \alpha - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h}. \end{aligned} \quad (10)$$

Ces équations modélisent la dynamique d'un écoulement à surface libre et à fond plat (Figure 7) dans la limite où l'épaisseur de la couche d'eau est faible devant l'échelle horizontale des phénomènes étudiés. Dans ces équations, le vecteur unitaire \underline{e}_x est parallèle au fond et fait un angle α avec l'horizontale. Le vecteur \underline{e}_z n'est donc pas vertical. Dans ce modèle, $h(x, t)$ désigne l'élévation de la surface libre dans le repère $(\underline{e}_x, \underline{e}_z)$ et $U(x, t)$ la vitesse moyenne de la couche dans la direction \underline{e}_x . L'intensité de la gravité est g et l'on a noté $g' = g \cos \alpha$. Le coefficient C_f modélise le frottement du fond sur le fluide. On suppose ici qu'il est constant, mais les résultats que nous allons présenter peuvent être facilement généralisés aux cas où il est fonction de h et de U .

Ce système d'équations non linéaires peut s'écrire sous la forme

$$\partial_t \underline{U} + \underline{B}(\underline{U}) \partial_x U = \underline{D}(\underline{U}) \quad (11)$$

où $\underline{U}(x, t)$, $\underline{B}(\underline{U})$ et $\underline{D}(\underline{U})$ sont des vecteurs ou matrices définis par

$$\underline{U}(x, t) = \begin{pmatrix} h(x, t) \\ U(x, t) \end{pmatrix}, \quad \underline{B}(\underline{U}) = \begin{pmatrix} U & h \\ g' & U \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{D}(\underline{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ g \sin \alpha - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h} \end{pmatrix}.$$

On choisit alors de multiplier la première équation du système de Saint Venant par $\sqrt{\frac{g'}{h}}$ puis de sommer avec la seconde. Ceci revient à multiplier à gauche le système par le vecteur ligne $\underline{\psi}_1^T(\underline{U}) = (\sqrt{g'/h}, 1)$ transposé du vecteur colonne $\underline{\psi}_1$ correspondant. Cette combinaison linéaire des deux équations conduit à la nouvelle équation

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{g'}{h}} \partial_t h + \partial_t U + \left(U \sqrt{\frac{g'}{h}} + g' \right) \partial_x h + \left(h \sqrt{\frac{g'}{h}} + U \right) \partial_x U &= \\ \left[\partial_t U + (U + \sqrt{g'h}) \partial_x U \right] + \sqrt{\frac{g'}{h}} \left[\partial_t h + (U + \sqrt{g'h}) \partial_x h \right] &= \\ \left[\partial_t + (U + \sqrt{g'h}) \partial_x \right] (U + 2\sqrt{g'h}) &= E(h, U) \end{aligned} \quad (12)$$

où l'on a noté $E(h, U) = g \sin \alpha - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h}$. Cette équation est de la forme

$$\begin{aligned} (\partial_t + \lambda_1 \partial_x) J_1 &= E(h, U) \\ \text{avec} \quad \lambda_1 = U + \sqrt{g'h} &\quad \text{et} \quad J_1 = U + 2\sqrt{g'h}. \end{aligned} \quad (13)$$

En multipliant à gauche le système par le vecteur ligne $\underline{\psi}_2^T(\underline{U}) = (-\sqrt{g'h}, 1)$ on obtient, de la même façon :

$$\text{avec } \begin{aligned} (\partial_t + \lambda_2 \partial_x) J_2 &= E(h, U) \\ \lambda_2 &= U - \sqrt{g'h} \quad \text{et} \quad J_2 = U - 2\sqrt{g'h}. \end{aligned} \quad (14)$$

On a donc transformé le système des équations de Saint Venant non linéaires en un système équivalent qui s'écrit

$$\begin{aligned} (\partial_t + \lambda_1 \partial_x) J_1 &= N(J_1, J_2) \quad \text{et} \quad (\partial_t + \lambda_2 \partial_x) J_2 = N(J_1, J_2) \\ \text{avec } (\lambda_1, \lambda_2) &= (U + c, U - c) \\ \text{et } (J_1, J_2) &= (U + 2c, U - 2c) \quad , \end{aligned} \quad (15)$$

où l'on a noté $c = \sqrt{g'h}$ et $N(J_1, J_2) = E(h, U)$, les variables (J_1, J_2) et (h, U) étant liées par les relations

$$J_1 = \mathcal{J}_1(U, c) =: U + 2c \quad \text{et} \quad J_2 = \mathcal{J}_2(U, c) =: U - 2c \quad (16)$$

On en déduit facilement que $c = (J_1 - J_2)/4$ et $U = (J_1 + J_2)/2$.

Les quantités $J_1(x, t)$ et $J_2(x, t)$ sont appelées "fonctions de Riemann". Elles sont régies par deux équations d'advection couplées de vitesses d'advection respectives $\lambda_1(x, t)$ et $\lambda_2(x, t)$. On peut alors considérer les deux familles de courbes caractéristiques dont les équations respectives dans le plan (x, t) sont

$$\mathcal{C}_1 : \dot{x} = \lambda_1(x, t) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2 : \dot{x} = \lambda_2(x, t). \quad (17)$$

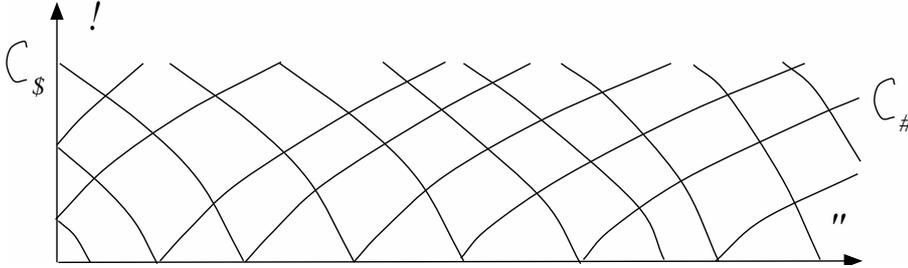


Figure 8: Familles de courbes caractéristiques \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 dans le plan (x, t) pour un système hyperbolique.

On définit alors la "dérivation le long des courbes caractéristiques" par les opérateurs

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathcal{C}_1} = \partial_t + \lambda_1(x, t) \partial_x \quad \text{et} \quad \left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathcal{C}_2} = \partial_t + \lambda_2(x, t) \partial_x. \quad (18)$$

L'application à une fonction $\rho(x, t)$ de la dérivée long de d'une courbe \mathcal{C} définie par la trajectoire $x(t)$ solution de $\dot{x} = \lambda(x, t)$ revient à prendre la dérivée par rapport au temps de la fonction $\rho[x(t), t]$ obtenue en suivant ρ le long de \mathcal{C} . En effet $\frac{d}{dt} \{\rho[x(t), t]\} = \{\partial_t + \lambda[x(t), t] \partial_x\} \rho[x(t), t]$. Avec cette notation, les équations de Saint Venant s'écrivent tout simplement

$$\left(\frac{dJ_1}{dt}\right)_{c_1} = N(J_1, J_2) \quad \text{et} \quad \left(\frac{dJ_2}{dt}\right)_{c_2} = N(J_1, J_2). \quad (19)$$

Cette interprétation du système en terme de dérivation suivant des courbes caractéristiques, dont le tracé dépend des solutions, permet de résoudre de nombreux problèmes d'application et de cerner exactement les domaines d'influence des conditions initiales ou des conditions aux limites.

C'est particulièrement vrai lorsqu'on peut négliger la pente du fond ($\alpha = 0$) et le frottement ($C_f = 0$) et que le second membre $N(J_1, J_2)$ est donc nul, J_1 et J_2 sont appelés des "invariants de Riemann". Ils sont constants le long de leurs courbes caractéristiques respectives.

2.2 Classification des EDP non linéaires

La transformation des équations de Saint Venant en un système couplé d'équations d'advection n'est pas un exemple isolé. C'est aussi le cas d'un grand nombre de systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) qualifiés d'"hyperboliques". Pour définir ces systèmes, on considère toutes les équations de la forme

$$\underline{A}(\underline{U}, x, t) \partial_t \underline{U} + \underline{B}(\underline{U}, x, t) \partial_x \underline{U} = \underline{D}(\underline{U}, x, t) \quad (20)$$

où $\underline{U}(x, t) \in \mathbb{R}^N$ est un champ réel à N composantes et \underline{A} , \underline{B} et \underline{D} des champs de matrices $N \times N$ de vecteurs dépendant des composantes de \underline{U} et des variables d'espace x et de temps t . Tous les coefficients de cette EDP dépendent donc, a priori, du jeu des $N + 2$ variables $(\underline{U}, x, t) = (U_1, \dots, U_N, x, t)$.

Pour tenter de transformer cette équation en un système d'équations d'advection couplées, on cherche, pour chaque jeu des valeurs des $N + 2$ variables (\underline{U}, x, t) , les champs de valeur propres $\lambda_n(\underline{U}, x, t)$ et de vecteurs propres à gauche $\underline{\psi}_n(\underline{U}, x, t)$ avec $n = 1, \dots, N$ vérifiant

$$\underline{\psi}_n^T \underline{B} = \lambda_n \underline{\psi}_n^T \underline{A}. \quad (21)$$

Les valeurs propres sont alors les solutions de l'équation

$$\det \left(-\lambda \underline{A} + \underline{B} \right) = 0. \quad (22)$$

Si $\underline{\underline{A}}$ n'est pas inversible on inverse le rôle de l'espace et du temps et l'on cherche donc des valeurs propres μ solutions de l'équation $\det \left(-\underline{\underline{A}} + \mu \underline{\underline{B}} \right) = 0$. Le cas où ni $\underline{\underline{A}}$ ni $\underline{\underline{B}}$ ne sont inversibles n'est pas envisagé ici. On supposera donc désormais que $\underline{\underline{A}}$ est inversible.

On dit que le système est "hyperbolique" pour un jeu de valeurs des $N + 2$ variables (\underline{U}, x, t) , s'il existe N directions propres à gauche $\underline{\psi}_n$ associées à des valeurs propres λ_n réelles. Il est "parabolique" si les valeurs propres sont réelles avec un nombre de directions propres inférieur à N . Il est "elliptique" lorsque toutes les valeurs propres sont complexes, ce qui implique que N soit pair. On qualifiera de "mixtes" tous les autres cas.

Seuls les systèmes hyperboliques nous intéressent ici, même si cette propriété est restreinte à certains jeux de valeurs (\underline{U}, x, t) . On dit que le système est "inconditionnellement hyperbolique" s'il est hyperbolique pour tous les jeux de valeurs (\underline{U}, x, t) . C'est le cas, par exemple, des équations de Saint Venant 1D.

2.3 Méthode des caractéristiques dans le cas hyperbolique

On se place donc dans les régions des jeux de valeurs (\underline{U}, x, t) où le système est hyperbolique. En multipliant à gauche le système d'EDP par un des vecteurs lignes $\underline{\psi}_n^T$, on obtient

$$\underline{\psi}_n^T \underline{\underline{A}} \partial_t \underline{U} + \underline{\psi}_n^T \underline{\underline{B}} \partial_x \underline{U} = \underline{\psi}_n^T \underline{\underline{A}} (\partial_t + \lambda_n \partial_x) \underline{U} = \underline{\psi}_n^T \underline{\underline{D}}. \quad (23)$$

En supposant la solution $\underline{U}(x, t)$ connue, on peut alors définir N familles de courbes caractéristiques \mathcal{C}_n du plan (x, t) par les équations

$$\mathcal{C}_n : \dot{x} = \lambda_n[U(x, t), x, t], \quad \text{pour } n = 1, \dots, N. \quad (24)$$

Étant donnée une courbe caractéristique \mathcal{C} , définie par la trajectoire $x(t)$ vérifiant $\dot{x} = \lambda[U(x, t), x, t]$ on définit la dérivation selon \mathcal{C} par l'opérateur

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{\mathcal{C}} = \partial_t + \lambda \partial_x. \quad (25)$$

On a donc transformé le système hyperbolique en les N équations

$$\underline{\psi}_n^T \underline{\underline{A}} \left(\frac{d\underline{U}}{dt} \right)_{\mathcal{C}_n} = \underline{\psi}_n^T \underline{\underline{D}}, \quad \text{pour } n = 1, \dots, N, \quad (26)$$

qui sont de la forme

$$\sum_{j=1}^N V_{j,n}(\underline{U}, x, t) \left(\frac{dU_j}{dt} \right)_{\mathcal{C}_n} = G_n(\underline{U}, x, t), \quad \text{pour } n = 1, \dots, N, \quad (27)$$

où les $V_{j,n}(U_1, \dots, U_N, x, t)$ sont les composantes de $\underline{\psi}_n^T(\underline{U}, x, t) \underline{A}(\underline{U}, x, t)$ pour les vecteurs propres à gauche $\underline{\psi}_n$ et les $G_n(U_1, \dots, U_N, x, t)$ les produits $\underline{\psi}_n^T(\underline{U}, x, t) \underline{D}(\underline{U}, x, t)$.

Pour l'exemple des équations de Saint Venant, ces équations s'écrivent

$$\begin{aligned} \sqrt{g'/h} \left(\frac{dh}{dt} \right)_{c_1} + \left(\frac{dU}{dt} \right)_{c_1} &= E(h, U) \\ -\sqrt{g'/h} \left(\frac{dh}{dt} \right)_{c_2} + \left(\frac{dU}{dt} \right)_{c_2} &= E(h, U), \end{aligned} \quad (28)$$

avec $V_{1,1}(h) = \sqrt{g'/h}$, $V_{2,1} = 1$, $V_{1,2}(h) = -\sqrt{g'/h}$, $V_{2,2} = 1$ et $G_1(h, U) = G_2(h, U) = E(h, U)$. On voit que l'on peut alors "intégrer" ces équations pour écrire

$$\frac{d}{dt} \left(U + 2\sqrt{g'h} \right)_{c_1} = E(h, U) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \left(U - 2\sqrt{g'h} \right)_{c_2} = E(h, U). \quad (29)$$

On a pu ainsi définir les "fonctions de Riemann" $J_1 = U + 2\sqrt{g'h}$ et $J_2 = U - 2\sqrt{g'h}$.

Notons que dans le cas général il n'est pas toujours possible de définir de telles fonctions dans la mesure où on ne peut pas toujours "intégrer" une équation de la forme (pour l'exemple $N = 2$)

$$V_{1,n}(h, U, x, t) \left(\frac{dh}{dt} \right)_{c_n} + V_{2,n}(h, U, x, t) \left(\frac{dU}{dt} \right)_{c_n} = G_n(h, U, x, t) \quad (30)$$

même lorsque $V_{1,n}$, $V_{2,n}$ et G_n ne dépendent que de h et U .

Lorsque l'on peut "intégrer" le système hyperbolique, comme c'est le cas de l'exemple des équations de Saint Venant, il existe N fonctions de Riemann J_n , ce qui permet d'écrire

$$\left(\frac{dJ_n}{dt} \right)_{c_n} = N_n(J_1, \dots, J_N, x, t) \quad \text{pour } n = 1, \dots, N \quad (31)$$

où les second membres de ce système sont définis par $N_n(J_1, \dots, J_N, x, t) = G_n(U_1, \dots, U_N, x, t)$, le passage entre les N composantes J_n et les N composantes U_n étant effectué en résolvant le système implicite reliant les N composantes (U_1, \dots, U_N) aux N valeurs (J_1, \dots, J_N) . Lorsque le second membre $\underline{D}(\underline{U}, x, t)$ est nul, de donc les fonctions $G_n(\underline{U}, x, t)$ et $N_n(J_1, \dots, J_N, x, t)$ le sont aussi, les fonctions J_n sont invariantes le long de leurs courbes caractéristiques \mathcal{C}_n respectives. Il y a alors N "invariants de Riemann".

Qu'il y ait ou non de fonctions ou d'invariants de Riemann, les N relations différentielles de la forme

$$\underline{\psi}_n^T \underline{A} \left(\frac{d\underline{U}}{dt} \right)_{c_n} = \underline{\psi}_n^T \underline{D} \quad \text{pour } n = 1, \dots, N, \quad (32)$$

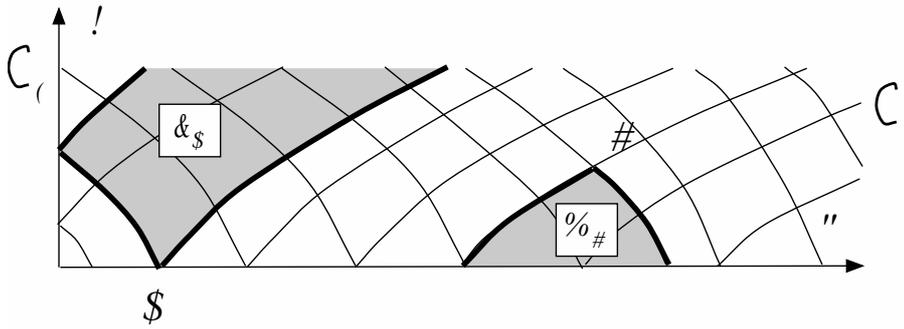


Figure 9: Domaine S_P influencé par le point P et domaine Q_M qui influence le point M .

valides pour un système hyperbolique, permettent de déterminer que le domaine S_P influencé par un point P du plan (x, t) est délimité par les courbes caractéristiques qui en partent et que le domaine Q_M qui influence la solution en un point M est délimité par les courbes qui y arrivent (figure 9).

2.4 Détermination pratique des caractéristiques

Nous présentons ici une méthode permettant de transformer un système hyperbolique en N équations d'advections sans avoir à calculer explicitement les vecteurs propres à gauche $\underline{\psi}_n$. Cette méthode permet en effet de remplacer le calcul fastidieux de N vecteurs propres par le calcul d'un seul déterminant $2N \times 2N$.

Nous choisissons de présenter cette méthode sur l'exemple des équations de Saint Venant. La généralisation au cas d'un système d'EDP hyperbolique quelconque s'effectue sans difficulté. La méthode, appliquée à notre exemple, débute par l'écriture des quatre équations suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t h & +U \partial_x h & +h \partial_x U & = & 0 \\ & +\partial_t U & +g' \partial_x h & +U \partial_x U & = & E(h, U) \\ \partial_t h & & +\lambda \partial_x h & & = & \left(\frac{dh}{dt}\right)_C \\ & \partial_t U & & +\lambda \partial_x U & = & \left(\frac{dU}{dt}\right)_C \end{cases} \quad (33)$$

dont les premières lignes sont les équations de Saint Venant et les deux dernières lignes de simples définitions des dérivées de h et U le long de courbes \mathcal{C} d'équations $\dot{x} = \lambda[\underline{U}(x, t), x, t]$. La fonctions $\lambda(\underline{U}, x, t)$ et les courbes \mathcal{C} ne sont pas encore connues à cette étape de la méthode.

Ces quatre équations sont non linéaires dans la mesure où les coefficients des

dérivées partielles dépendent des fonctions h et U . Cela ne nous empêche pas de les écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & U & h \\ 0 & 1 & g' & U \\ 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t h \\ \partial_t U \\ \partial_x h \\ \partial_x U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ h' \\ U' \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{I} & \lambda \underline{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \underline{U} \\ \partial_x \underline{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{D} \\ \underline{U}' \end{pmatrix} \quad (34)$$

où l'on a noté $\underline{U} = (h, U)$, $h' = \left(\frac{dh}{dt}\right)_c$, $U' = \left(\frac{dU}{dt}\right)_c$ et $\underline{U}' = \left(\frac{d\underline{U}}{dt}\right)_c$ pour plus de concision. On voit que l'on a mis en évidence une matrice 4×4 constituée des blocs \underline{A} , \underline{B} , \underline{I} et $\lambda \underline{I}$ où \underline{I} est la matrice identité et \underline{A} et \underline{B} les notations de matrices permettant de généraliser l'approche aux autres systèmes d'EDP hyperboliques. Le déterminant de cette matrice 4×4 est $\det(\lambda \underline{A} - \underline{B})$. Il y a donc N racines réelles de ce polynôme de degré N en λ dans la mesure où le système est hyperbolique. Pour l'exemple des équations de Saint Venant, l'annulation de ce déterminant 4×4 conduit à l'équation

$$(\lambda - U)^2 - g' h = 0 \quad (35)$$

et l'on retrouve bien les racines réelles $\lambda_1 = U + \sqrt{g'h}$ et $\lambda_2 = U - \sqrt{g'h}$.

On suppose que maintenant que $\lambda(\underline{U}, x, t)$ est l'une de ces racines réelles et que $U(x, t)$ et $h(x, t)$ vérifient les équations des Saint Venant pour (x, t) donné. Comme le rang de la matrice 4×4 est inférieur à 4, le second membre $(0, E, h', U')$ doit être dans un sous-espace particulier de \mathbb{R}^4 qui n'est autre que l'image de la matrice. Il existe donc une ou plusieurs relations, appelées "relations de compatibilité" exprimant l'appartenance à cette image. On suppose ici que le rang de la matrice 4×4 est 3, ce que l'on peut facilement vérifier pour l'exemple des équations de Saint Venant. Dans ce cas, il n'y a qu'une seule relation de compatibilité. Pour la déterminer, il suffit de remplacer une quelconque des colonnes de la matrice 4×4 par le second membre et d'annuler le déterminant ainsi formé. En choisissant la dernière colonne pour l'exemple des équations de Saint Venant, on obtient ainsi la relation de compatibilité

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & U & 0 \\ 0 & 1 & g' & E \\ 1 & 0 & \lambda & h' \\ 0 & 1 & 0 & U' \end{vmatrix} = (\lambda - U)U' + g'h' - (\lambda - U)E = 0. \quad (36)$$

Pour la racine $\lambda_1 = U + \sqrt{g'h}$ (le cas λ_2 est similaire) on peut diviser cette égalité par $\sqrt{g'h}$ pour retrouver l'équation

$$U' + \sqrt{\frac{g'}{h}} h' = \left(\frac{dU}{dt}\right)_{c_1} + \sqrt{\frac{g'}{h}} \left(\frac{dh}{dt}\right)_{c_1} = E(h, U). \quad (37)$$

Pour un système hyperbolique quelconque, on peut donc écrire les N relations de compatibilités obtenues avec les N valeurs propres λ_n pour retrouver les N relations différentielles (32). Lorsque ces relations s'intègrent, on obtient les N équations différentielles (31) couplant N fonctions de Riemann.

3 Déténtes, ressauts et relations de sauts

Nous examinons ici deux exemples d'applications de la méthode des caractéristiques dans le cas où le système admet des invariants de Riemann. Nous étudions la vidange puis le remplissage d'une lame d'eau dans un canal, en utilisant le modèle des équations de Saint Venant sans pente et sans frottement. Certains résultats obtenus à travers le traitement de ces exemples se généralisent à de nombreux autres systèmes admettant des invariants de Riemann. C'est le cas de la définition de la notion d'"onde simple" qui décrit la phase permettant de passer d'une solution uniforme (en espace et en temps) à des comportements plus complexes. Cette onde simple peut être une "détente" ou une "compression" suivant qu'une famille de caractéristiques s'écartent ou se rapprochent les unes des autres. Dans le cas d'une onde de compression, le modèle continu que constitue les EDP hyperbolique atteint ses limites et il faut recourir à une modélisation des discontinuités. Cette modélisation est contenu dans les relations de saut, que seul le modélisateur peut formuler en se basant sur des bilans globaux permettant de traduire les lois de conservation de la mécanique.

3.1 Vidange ou remplissage d'un canal

On considère une couche fluide peu profonde dans un canal à fond horizontal et situé à droite d'une écluse positionnée en $x = 0$. On suppose que la hauteur d'eau $h = h_e(t)$ en $x = 0$ est imposée par les manoeuvres de l'écluse et que le mouvement peut être modélisé par les équations de Saint Venant sans frottement.

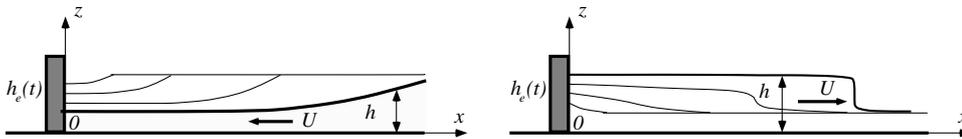


Figure 10: Onde dans un canal induit par un niveau d'eau $h_e(t)$ variable. a) Détente (vidange) avec $h_e(t)$ décroissant, b) compression (remplissage) avec $h_e(t)$ croissant.

On suppose que pour $t \leq 0$, l'écoulement est uniforme avec $(h, U) = (h_0, 0)$. On suppose que dans l'intervalle $t \in [0, t_f]$ la hauteur d'eau de l'écluse $h_e(t)$ décroît (vidange) ou croît (remplissage) de h_0 à h_f . Enfin pour $t \geq t_f$, on suppose que $h_e(t)$ reste constant et égal à h_f . La diminution ou l'augmentation du niveau d'eau va se propager dans le canal (figure 10). Par analogie avec la propagation d'une dépression ou d'une surpression dans un tube rempli d'un gaz, on parle respectivement d'ondes de "détente" ou de "compression".

Pour traiter analytiquement cet exemple, on suppose que la décroissance ou la croissance de $c_e(t) = \sqrt{g'h_e(t)}$ est linéaire. On a donc $c_e(t) = c_0 = \sqrt{g'h_0}$ pour $t \leq 0$, $c_e(t) = c_0 + \gamma t$ pour $t \in [0, t_f]$ et $c_e(t) = c_f = \sqrt{g'h_f}$ pour $t \geq t_f$ avec $\gamma < 0$ dans le cas de la détente et $\gamma > 0$ dans le cas de la compression (figure 11).

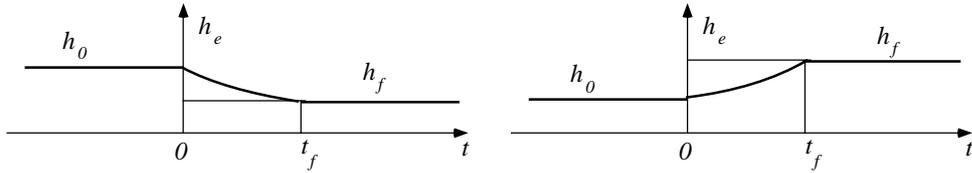


Figure 11: Courbe $h_e(t)$ du niveau d'eau imposé par l'écluse en $x = 0$. a) Détente (vidange), b) compression (remplissage).

Il est possible de construire la solution de ces problèmes de manière géométrique en traçant les courbes caractéristiques dont nous rappelons les équations respectives :

$$\mathcal{C}_1 : \dot{x} = U + c \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2 : \dot{x} = U - c \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{g'h} \quad (38)$$

Les invariants de Riemann $J_1(x, t)$ et $J_2(x, t)$ vérifient

$$\left(\frac{dJ_1}{dt} \right)_{\mathcal{C}_1} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dJ_2}{dt} \right)_{\mathcal{C}_2} = 0$$

avec $J_1 = \mathcal{J}_1(U, c) = U + 2c$ et $J_2 = \mathcal{J}_2(U, c) = U - 2c$. (39)

3.2 Onde de détente

Nous examinons dans un premier temps le cas de la détente et nous supposons donc que $\gamma < 0$. Nous allons montrer que l'on peut découper de demi-plan $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ en trois régions (Figure 12) :

- Région 0 : écoulement uniforme $(h, U) = (h_0, 0)$
- Région OS : onde de détente $h(x, t)$ et $U(x, t)$ variable

- Région f : écoulement uniforme $(h, U) = (h_f, U_f)$

où U_f ainsi que (h, U) dans la région OS sont à déterminer.

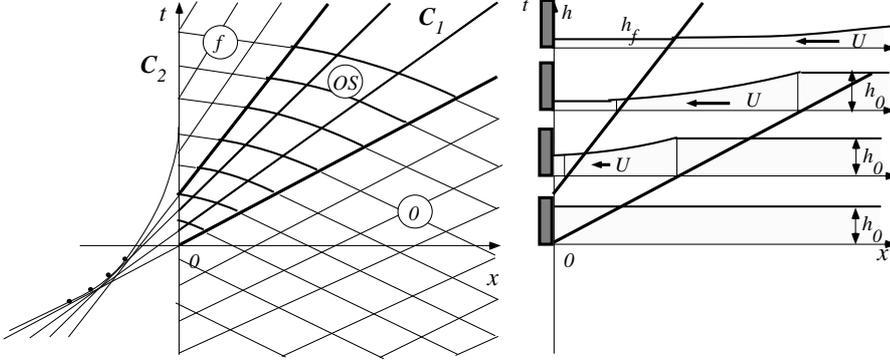


Figure 12: Caractéristiques C_1 et C_2 pour l'onde de détente.

On définit donc la région 0 comme étant l'ensemble des points pour lesquels $(h, U) = (h_0, 0)$. Dans cette région, les caractéristiques sont des droites d'équations $C_1 : x = a_1 + c_0 t$ et $C_2 : x = a_1 - c_0 t$ où l'on a noté $c_0 = \sqrt{g' h_0}$ et (a_1, a_2) les intersections respectives de ces droites avec l'axe Ox .

On démontre tout d'abord que la frontière de la région 0 est forcément une caractéristique C_1 , donc une droite. Si ce n'était pas le cas, un point B suffisamment proche de cette frontière dans la région OS adjacente serait alors à l'intersection d'un C_1 et d'une C_2 transverses à la frontière (voir figure 13a). Soit E et F les intersections respectives des ces courbes avec la frontière. L'invariance des champs $J_1(x, t)$ et $J_2(x, t)$ le long de leurs caractéristiques respectives permet d'écrire

$$\begin{cases} \mathcal{J}_1(U_B, c_B) = \mathcal{J}_1(U_E, c_E) = \mathcal{J}_1(U_0, c_0) \\ \mathcal{J}_2(U_B, c_B) = \mathcal{J}_2(U_F, c_F) = \mathcal{J}_2(U_0, c_0) \end{cases} \iff \begin{cases} U_B + 2c_E = U_0 + 2c_0 \\ U_B - 2c_E = U_0 - 2c_0 \end{cases} \quad (40)$$

où (U_B, c_B) , (U_E, c_E) et (U_F, c_F) sont respectivement les valeurs des (U, c) aux points B , E et F et $(U_0, c_0) = (0, \sqrt{g' h_0})$ les valeurs ce couple dans la région 0. On en déduit alors que $(U_B, c_B) = (U_0, c_0)$, ce qui signifie que B appartient à la région 0. Comme B peut être choisi aussi proche que l'on veut de la frontière supposée délimitant les régions 0 et OS , il y a une contradiction. Cette frontière ne peut donc pas être transverse à la fois aux familles de courbes C_1 et C_2 . Nous avons donc démontré que la frontière d'une région où l'écoulement est uniforme est donc une C_1 ou une C_2 . Pour le présent exemple il ne peut pas s'agir d'une C_2 car l'écoulement resterait uniforme pour tout temps.

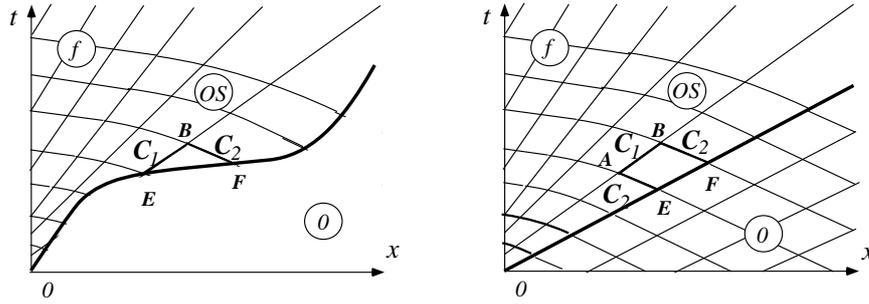


Figure 13: Démonstration de deux résultats : a) la frontière entre les régions 0 et OS est une C_1 , b) les C_1 de la région OS sont des droites.

Nous allons démontrer maintenant que les caractéristiques C_1 de la région OS adjacente à la région 0 sont des droites le long desquelles U et c sont invariants. Considérons une C_1 de la région OS suffisamment proche de la frontière entre les régions 0 et OS et choisissons deux points A et B sur cette caractéristique (figure 13b). On appelle alors E et F les deux intersections entre la frontière et les deux courbes C_2 passant respectivement par A et B . L'invariance des fonctions J_1 et J_2 le long de leurs caractéristiques respectives permet d'écrire

$$\begin{cases} \mathcal{J}_1(U_A, c_A) & = & \mathcal{J}_1(U_B, c_B) \\ \mathcal{J}_2(U_A, c_A) & = & \mathcal{J}_2(U_E, c_E) = \mathcal{J}_2(U_0, c_0) = \mathcal{J}_2(U_F, c_F) = \mathcal{J}_2(U_B, c_B) \end{cases}$$

avec des notations évidentes pour les valeurs de (U, c) aux points considérés. On en déduit que $U_A = U_B$ et $c_A = c_B$. Les grandeurs U et c (donc h) sont donc constantes le long des C_1 dans la région OS. Comme ces caractéristiques sont définies par l'équation $\dot{x} = U + c$, leur pente est constante et ce sont donc des droites. On définit la région OS adjacente à la région 0 d'écoulement uniforme comme l'ensemble des points A par lesquels passent une C_2 (a priori courbe) coupant la frontière. On appelle souvent "onde simple" une telle région adjacente à une région d'écoulement uniforme, du fait qu'un profil de solution se propage le long de ces caractéristiques, avec une déformation résultant du simple fait que ces droites ne sont pas parallèles.

Nous allons maintenant déterminer la vitesse $U(0, t)$ en $x = 0$. On suppose que toutes les C_2 qui coupent l'axe Ot sont issues de la région 0. Cette hypothèse pourra être justifiée a posteriori lorsque l'on aura réussi à construire ainsi une solution dans tout le demi-plan (x, t) . Des justifications a priori pourraient être recherchées. Étant donné un point $(0, \tau)$ de l'axe Ot , pour lequel $c(0, \tau) = c_e(\tau) = c_0 + \gamma\tau = \sqrt{g'h_e(\tau)}$ est donc connu, l'invariance de J_2 le long de ces C_2 permet donc d'écrire

$$\mathcal{J}_2[U(0, \tau), c_e(\tau)] = \mathcal{J}_2(0, h_0) \iff U(0, \tau) - 2c_e(\tau) = -2c_0 \quad (41)$$

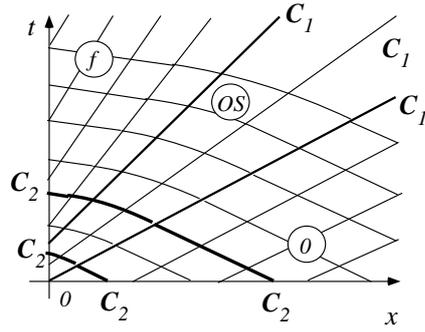


Figure 14: Détermination de $U(0, t)$ à l'aide de l'invariant J_2 le long des courbes caractéristiques \mathcal{C}_2 .

et donc de déterminer la vitesse de l'écoulement $U(0, \tau) = 2[c_e(\tau) - c_0]$. Pour $\tau \in [0, t_f]$, on observe une vitesse $U(0, \tau) = 2\gamma t$ au niveau de l'écluse qui est négative (vidange) dans la mesure où $\gamma < 0$. Pour $\tau \geq t_f$, la vitesse constante $U_f = U(0, \tau) = 2(c_f - c_0) = 2\gamma t$, elle aussi négative, permet de maintenir la hauteur $h(0, \tau) = h_f$ constante en continuant à vider le canal.

Il nous suffit maintenant de tracer les caractéristiques \mathcal{C}_1 issues des points $(0, \tau)$ de l'axe Ot , sachant, comme nous l'avons démontré, que ce sont des droites. Leurs équations respectives s'écrivent donc, pour $\tau \in [0, t_f]$

$$x = [U(0, \tau) + c_e(\tau)](t - \tau) = [3c_e(\tau) - 2c_0](t - \tau) = (c_0 + 3\gamma\tau)(t - \tau). \quad (42)$$

et $x = (3c_f - 2c_0)(t - \tau)$ pour $\tau \geq t_f$. La première famille est constituée de droites toutes disjointes dans le demi-plan $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et on définit la région OS comme étant leur réunion. La deuxième famille, qui définit la région f , est formée de droites parallèles. Comme nous avons démontré que U et c étaient constants le long de ces droites et connus sur l'axe Ot , on est capable de déterminer géométriquement la solution (U, c) en tout point du demi-plan (x, t) . On voit ainsi que l'écoulement est uniforme dans la région f avec $(U, h) = (U_f, h_f)$. Dans un point (x, t) de région OS d'onde simple, la solution s'obtient en déterminant la droite \mathcal{C}_1 , paramétrée par τ et qui passe à la fois par (x, t) et $(0, \tau)$. La valeur de $\tau(x, t)$ associée au couple (x, t) est obtenue en résolvant l'équation implicite

$$x = [3c_e(\tau) - 2c_0](t - \tau) = (c_0 + 3\gamma\tau)(t - \tau). \quad (43)$$

Compte-tenu du choix particulier de $c_e(\tau)$ variant linéairement, on peut résoudre cette équation en écrivant

$$\tau(x, t) = \frac{1}{6\gamma} \left[-(c_0 - 3\gamma t) + \sqrt{(c_0 + 3\gamma t)^2 + 12\gamma x} \right]. \quad (44)$$

Dans le cas d'une courbe $c_e(\tau)$ quelconque, cette résolution doit être effectuée de manière numérique ou graphique. On a donc $U(x, t) = U[0, \tau(x, t)] = 2\{c_e[\tau(x, t)] - c_0\}$ et $c(x, t) = c_e[\tau(x, t)]$ dans la région OS de l'onde simple.

On peut conclure le cas de l'onde de détente en traçant la famille des courbes caractéristiques \mathcal{C}_2 . Dans les régions uniformes 0 et d , ce sont des droites d'équations respectives $x = a - c_0 t$ et $x = a + (U_f - c_f)t = a + (c_f - c_0)t$. Les équations des courbes caractéristiques \mathcal{C}_2 dans la région OS s'obtiennent en résolvant l'équation différentielle

$$\mathcal{C}_2 : \dot{x} = U(x, t) - c(x, t) = c_e[\tau(x, t)] - 2c_0 . \quad (45)$$

Même pour l'exemple $c_e(t) = c_0 + 3\gamma t$, qui conduit à l'équation $\dot{x} = 2\gamma \tau(x, t)$, il faut recourir à une méthode numérique pour tracer ces courbes.

3.3 Onde de compression

Nous examinons maintenant le cas de la compression et nous supposons donc $\gamma > 0$. Nous allons montrer que l'on peut découper de demi-plan $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ en quatre régions (Figure 15) :

- Région 0 : écoulement uniforme $(h, U) = (h_0, 0)$
- Région OS : onde de compression $h(x, t)$ et $U(x, t)$ variables
- Région $CUSP$: intérieur de la fonce
- Région f : écoulement uniforme $(h, U) = (h_f, U_f)$

où U_f ainsi que (h, U) dans la région OS sont à déterminer, et où la solution à l'intérieur de la région $CUSP$ ne peut pas être trouvée sans introduire des relations de saut permettant de modéliser les chocs.

La détermination des régions 0, OS et f se fait comme pour le cas de l'onde de détente. Dans la région d'écoulement uniforme, la vitesse constante $U_f = 2(c_f - c_0) = 2\gamma t$, est positive et correspond au remplissage du canal permettant de maintenir la hauteur $h = h_f$ au niveau de d'écluse. Dans la région OS de l'onde simple, on calcule la solution (U, c) en traçant les droites \mathcal{C}_1 issues de l'axe Ot .

Le problème qui survient dans le cas de l'onde de compression est le fait que ces droites \mathcal{C}_1 se coupent. On définit alors la région $CUSP$ comme étant l'ensemble des points par lesquels passent plus d'une droite caractéristique \mathcal{C}_1 . Cette région est comprise entre la droite \mathcal{C}_1 issue de l'origine (d'équation

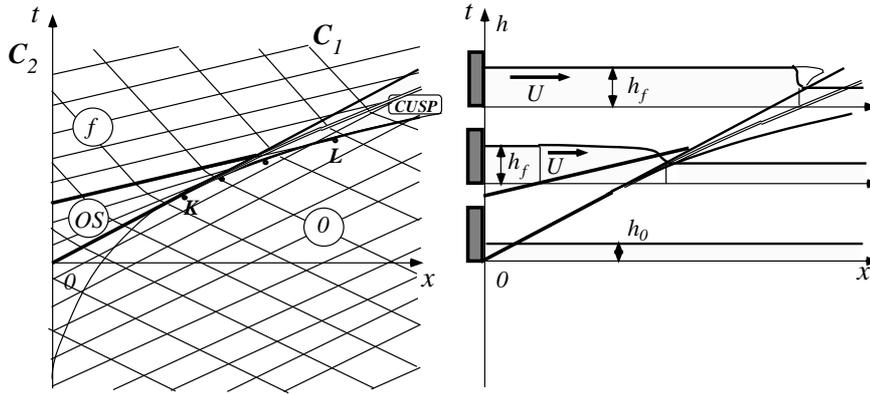


Figure 15: Caractéristiques \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 pour l'onde de compression.

$x = c_0 t$), l'enveloppe des \mathcal{C}_1 de la région OS formant un bout de parabole (calcul classique de l'enveloppe d'une famille de courbes) reliant les points K et L (voir figure 15) et la droite \mathcal{C}_1 issue de la frontière entre les régions OS et f . La solution construite par la méthode des caractéristiques est multivaluée. On peut se représenter la solution ainsi obtenue comme une vague de surf qui s'allongerait indéfiniment sans réussir à déferler. Cette solution mathématique n'a rien de physique et il se forme dans la nature une "ressaut hydraulique" que l'on peut essayer de modéliser par une discontinuité de la solution. Il faut donc recourir à une nouvelle modélisation pour décrire le ressaut hydraulique qui se forme dans cette région.

Nous allons voir qu'une modélisation de ce phénomène peut être obtenue à l'aide de relations de saut déduites des lois des conservations de la masse et de la quantité de mouvement. Ces lois permettent d'écrire une relation entre la solution (U_g, h_g) à gauche du choc, la solution (U_d, h_d) à droite du choc et la vitesse $w(t)$ du choc dont la trajectoire dans le plan (x, t) est donc donnée par l'équation différentielle $\dot{x} = w(t)$. Nous ne poursuivons pas ici le traitement complet de cet exemple dont le but était de motiver l'introduction des relations de saut.

3.4 Relations de saut des équations de Saint Venant

Nous avons vu que les équations de Saint Venant, formulées sous forme d'un système d'équations aux dérivées partielles (EDP), ne permettent pas de résoudre les problèmes faisant apparaître des ressauts hydrauliques. Pour compléter la modélisation il faut revenir aux lois de conservation globales dont découlent les bilans locaux, c'est-à-dire les EDP.

Sans revenir sur les principes de l'approximation des équations de Saint Venant, nous admettons ici que les bilans globaux exprimant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour une couche fluide à surface libre peu profonde s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h \, dx + [hU]_{x_1}^{x_2} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} hU \, dx + \left[hU^2 + \frac{1}{2}g' h^2 \right]_{x_1}^{x_2} &= \int_{x_1}^{x_2} E(h, U) h \, dx \end{aligned} \quad (46)$$

pour tout intervalle $[x_1, x_2]$ en notant $E(h, U) h = gh \sin \alpha - \frac{C_f}{2} U |U|$ et $g' = g \cos \alpha$.

On déduit tout d'abord de ces bilans locaux, les bilans globaux valables pour les solutions continues et qui conduisent à la formulation des équations de Saint Venant écrites sous la forme conservative suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x (hU) &= 0 \\ \partial_t (hU) + \partial_x \left(hU^2 \right) + \frac{1}{2} g' \partial_x h^2 &= E(h, U) h. \end{aligned} \quad (47)$$

On démontre facilement que cette formulation est équivalente à celle que nous avons présentée auparavant.

On déduit ensuite des bilans globaux les relations de sauts gouvernant le dynamisme des discontinuités des solutions et qui s'écrivent

$$\begin{aligned} \llbracket h(U - w) \rrbracket &= 0 \\ \llbracket hU(U - w) + \frac{1}{2}g' h^2 \rrbracket &= 0 \end{aligned}$$

où w est la vitesse du choc et où l'on a noté $\llbracket \varphi \rrbracket = \varphi_D - \varphi_G$ la discontinuité entre les valeurs à droite (D) et à gauche (G) du choc. Ces relations de saut s'écrivent donc

$$\begin{aligned} h_G(U_G - w) &= h_D(U_D - w) \\ h_G U_G(U_G - w) + \frac{1}{2}g' h_G^2 &= h_D U_D(U_D - w) + \frac{1}{2}g' h_D^2 \end{aligned} \quad (48)$$

On peut voir ces relations de saut comme un système de deux équations pour les cinq inconnues (U_G, h_G, U_D, h_D, w) . Il suffit donc de connaître **trois** paramètres pour en déduire les deux autres. On peut illustrer cette situation à l'aide des deux exemples suivants :

- *Exemple 1* : Si h_G, h_D et $U_D = 0$ sont connus on calcule $U_G = w \left(1 - \frac{h_D}{h_G} \right)$ et $w = \pm \sqrt{g' \frac{h_G}{h_D} \left(\frac{h_G + h_D}{2} \right)}$. Il y a donc deux solutions a priori (une seule a un sens physique comme il est indiqué plus loin).

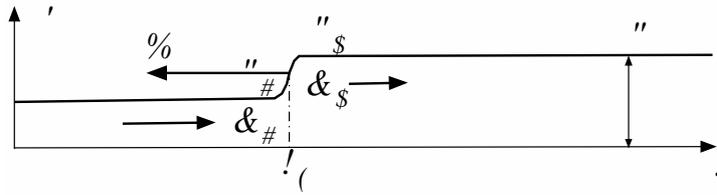


Figure 16: Ressaut hydraulique.

- *Exemple 2* : Si h_G , h_D et $w = 0$ sont connus, on calcule $U_G = \pm \sqrt{g' \frac{h_D}{h_G} \left(\frac{h_G + h_D}{2} \right)}$ et $U_D = \pm \sqrt{g' \frac{h_G}{h_D} \left(\frac{h_G + h_D}{2} \right)}$. Il y a donc deux solutions a priori (une seule a un sens physique).

On peut donc construire de multiples familles de ressauts correspondant à des applications particulières. Cependant, la moitié de ces ressauts ne peuvent pas s'appliquer à une situation réaliste observée dans la nature. En effet, la modélisation obtenue avec ces deux seules relations de saut est encore incomplète. Il faut lui ajouter une inégalité résultant du second principe de la thermodynamique. Dans le cas des chocs des équations d'Euler compressibles (que nous avons choisi de ne pas présenter ici), cette inégalité stipule que la discontinuité doit être telle que l'entropie d'une particule traversant le choc augmente. Mais pour le cas des équations de Saint Venant qui nous intéressent ici, l'entropie n'apparaît pas explicitement dans les équations. Il faut donc traduire le second principe par une inégalité sur l'énergie.

Nous admettons que l'équation de bilan global de l'énergie d'une couche fluide comprise entre les abscisses x_1 et x_2 s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2} h U^2 + \frac{1}{2} g' h^2 \right) dx + \left[\frac{1}{2} g' h^2 U \right]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} [E(h, U) h U - D] dx \quad (49)$$

où $D(x, t)$ modélise la dissipation de l'énergie concentrée dans les éventuels ressauts hydrauliques. L'énergie divisée par la masse volumique (constante) est la somme de l'énergie cinétique $\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} h U^2 dx$ et de l'énergie potentielle $\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} g' h^2 dx$.

Dans le cas d'un unique ressaut d'équation $x = x_c(t)$, on peut écrire $D(x, t) = D_0 \delta[x - x_c(t)]$ où $\delta(x)$ est la distribution de Dirac. Le second principe de la thermodynamique requiert que l'énergie décroisse en suivant une particule fluide, ce qui se traduit ici par $D_0 > 0$ (respectivement < 0) si le débit $h_G(U_G - w) = h_D(U_D - w)$ calculé dans le repère mobile lié au ressaut vérifie

$h_G(U_G - w) = h_D(U_D - w) > 0$ (respectivement < 0). On déduit alors du bilan global l'équation de bilan local

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} h U^2 + \frac{1}{2} g' h^2 \right) + \partial_x \left(\frac{1}{2} h U^3 + g' h^2 U \right) = E(h, U) h U - D \quad (50)$$

ainsi que la relation de saut

$$\left[\left(\frac{1}{2} h U^2 + \frac{1}{2} g' h^2 \right) (U - w) + \frac{1}{2} g' h^2 U \right] = -D_0 < 0$$

si $h_G(U_G - w) = h_D(U_D - w) > 0$. (51)

On en déduit l'inégalité,

$$(h_G U_G^2 + g' h_G^2) (U_G - w) + g' h_G^2 U_G > (h_D U_D^2 + g' h_D^2) (U_D - w) + g' h_D^2 U_D$$

si $h_G(U_G - w) = h_D(U_D - w) > 0$. (52)

Cette inégalité permet de ne garder que les ressauts ayant un sens physique (conforme au second principe) comme illustrés sur les exemples suivants :

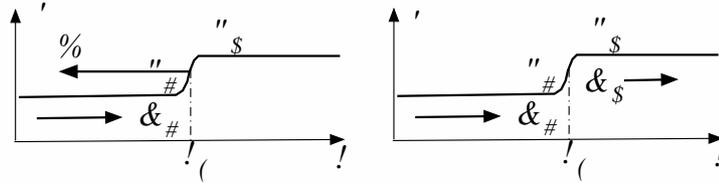


Figure 17: Deux exemples de ressaut hydraulique. a) Exemple 1 avec $U_D = 0$, b) Exemple 2 avec $w = 0$.

- Exemple 1 : Si $h_G < h_D$ et $U_D = 0$ sont connus, on ne garde que la solution $U_G = w \left(1 - \frac{h_D}{h_G} \right) > 0$ et $w = -\sqrt{g' \frac{h_G}{h_D} \left(\frac{h_G + h_D}{2} \right)} < 0$.
- Exemple 2 : Si $h_G < h_D$ et $w = 0$ sont connus, on ne garde que la solution $U_G = \sqrt{g' \frac{h_D}{h_G} \left(\frac{h_G + h_D}{2} \right)} > 0$ et $U_D = \sqrt{g' \frac{h_G}{h_D} \left(\frac{h_G + h_D}{2} \right)} > 0$.

En examinant les relations de saut, on démontre que, dans le repère mobile qui se déplace à la vitesse du ressaut, le nombre Froude relatif à ce repère est inférieur à 1 (fluvial) d'un côté du ressaut et supérieur à 1 (torrentiel) de l'autre. L'inégalité implique que l'on passe du Froude supérieur à un au Froude inférieur à 1 en suivant une particule fluide qui traverse le ressaut. Dans le cas particulier où le ressaut est stationnaire, l'écoulement passe de torrentiel à fluvial en le traversant.

Conclusion

Nous avons identifié puis étudié les systèmes d'EDP hyperboliques 1D en nous servant de l'exemple des équations de Saint Venant comme prototype de cette classe d'équations. Ces systèmes ont la particularité de pouvoir être transformés en un système d'équations différentielles ordinaires faisant intervenir la dérivée le long de courbes caractéristiques. Dans le cas général, ces courbes caractéristiques dépendent de la solution, et donc des conditions aux limites ou initiales.

Le tracé des caractéristiques permet de déterminer le nombre exact de contraintes que l'on peut imposer sous forme de conditions initiales, aux limites ou le long d'une ligne quelconque du plan (x, t) . En effet, on peut considérer qu'une courbe caractéristique est porteuse d'une information reliant un point à un autre du plan (x, t) . Si N est le nombre de degrés de liberté du système, il faut qu'en un point arrivent exactement N informations connues pour y déterminer la solution.

Notons que la nature des contraintes à imposer sous forme de conditions initiales ou aux limites peut dépendre de la solution, dans la mesure où le tracé des caractéristiques en dépend. Par exemple, un écoulement sous-critique ($F_r < 1$) dans un canal requiert que l'on impose une condition aux limites en aval et une en amont pour décrire une solution continue, tandis qu'un écoulement supercritique ($F_r > 1$) requiert deux conditions aux limites en amont. Il est possible d'ajouter une condition supplémentaire en admettant la formation de choc dans la mesure où il s'introduit une inconnue supplémentaire qui est la vitesse de ce choc.

Nous avons développé l'algèbre permettant de déterminer en pratique les relations différentielles le long des caractéristiques aussi appelées "relations de comptabilité" en faisant référence à la méthode de calcul par déterminant que nous avons présentée. Dans certains cas, ces relations s'intègrent et le système s'écrit sous la forme de N équations différentielles ordinaires de N fonctions de Riemann. Les vitesses d'advection intervenant dans ces équations sont celles qui définissent les courbes caractéristiques dans le plan (x, t) . Dans le cas des systèmes d'EDP sans second membre (tous les termes sont des dérivées partielles) ces fonctions sont des invariants de Riemann qui sont donc constants le long des courbes caractéristiques.

Lorsque le système admet N invariants de Riemann, nous avons montré que la frontière d'une région du plan (x, t) d'écoulement uniforme était forcément une courbe caractéristique, et que les caractéristiques de la même famille que la région adjacente, appelée "onde simple", étaient des droites le long desquelles les composantes de la solution étaient invariantes. Cette propriété

permet de résoudre géométriquement de nombreux cas d'application.

Lorsque les caractéristiques d'une même famille (par exemple \mathcal{C}_1) se coupent, la solution semble être multivaluée dans une région de (x, t) délimitée par leur enveloppe. Ce constat montre en fait la limitation de la modélisation continue du problème et on peut recourir à une modélisation des chocs qui repose, en mécanique, sur des lois de conservation. On déduit de ces lois des relations de saut reliant les discontinuités des différentes grandeurs et la vitesse du choc. À l'intérieur de ces chocs, de taille infinitésimale au regard de la modélisation des relations saut, les hypothèses de non dissipation, qui conduisent à la nature hyperbolique des modèles, ne sont plus valides. Par exemple, la diffusion moléculaire, qui est négligée dans les équations de Saint-Venant, devient importante dans le ressaut qui est le lieu d'une intense dissipation d'énergie. L'application du second principe impose que l'énergie d'une particule diminue en traversant un choc, ce qui requiert une inégalité à rajouter aux équations de saut.

Au-delà de l'exemple des équations de Saint Venant 1D instationnaires que nous avons développé, on peut considérer l'exemple des équations de Saint Venant 2D stationnaires. Pour ce cas, l'étude des caractéristiques montre que ce système peut être hyperbolique ($F_r > 1$), parabolique ($F_r = 1$) ou elliptique ($F_r < 1$) en fonction du nombre de Froude $F_r = \sqrt{g'h}/(U^2 + V^2)$ où U et V sont les composantes de la vitesse 2D. On peut même considérer des solutions où coexistent des régions sous-critique et surpercritiques dans l'espace (x, y) . L'introduction de relation de saut permet de décrire des ressauts stationnaire pour ce modèle.

Toutes les notions développées ici en s'appuyant sur les équations de Saint Venant sont facilement applicables aux équations d'Euler compressibles, 1D instationnaires ou 2D stationnaires. Comme ces équations sont constituées de trois lois de conservation (masse, quantité de mouvement et énergie) au lieu de deux pour les équations de Saint Venant (masse, quantité de mouvement), il y a trois familles de caractéristiques au lieu de deux. Une des ces familles est confondue avec les trajectoires des particules fluides et admet pour invariant de Riemann l'entropie. Dans de nombreux cas d'applications où l'écoulement est homoentropique (entropie homogène en espace), on se ramène au cas où seulement deux familles de caractéristiques sont pertinentes, comme dans le cas des équations de Saint Venant. Il existe alors une analogie formelle entre ces dernières équations et les équations d'Euler, à condition de spécifier une loi d'état de gaz parfait très particulière.

Signalons enfin que la méthode des caractéristiques permet de développer des méthodes numériques particulièrement précises pour la simulation des systèmes hyperboliques.