EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 0.1 Modèles de l'équation de Burgers

On considère le modèle décrit par la fonction $u(x,t)$ continue ou discontinue tel que pour pour tout intervalle fixe $[x_1, x_2]$ on puisse écrire

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u\ dx + \frac{1}{2}\left[u^2\right]_{x_1}^{x_2} = 0\ . \tag{1}$$

1) Écrire le bilan local et l'équation de saut découlant de ce modèle.
2) Calculer la vitesse $w(t) = \dot{x}_c(t)$ d'un choc séparant une région uniforme $u(x,t) = u_1$ pour $x < x_c(t)$ d'une région uniforme $u(x,t) = u_2$ pour $x > x_c(t)$.
3) Répondre aux deux questions précédentes en considérant le nouveau modèle régi par l'équation $\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u^2\ \ dx + \frac{2}{3}\left[u^3\right]_{x_1}^{x_2} = 0$. On suppose ici que $u_1 + u_2 \neq 0$.
4) Comparer les deux modèles précédents.

On considère un troisième modèle tel que pour tout intervalle mobile $[x_1(t), x_2(t)]$ vérifiant $\dot{x}_1(t) = u[x_1(t), t]$ et $\dot{x}_2(t) = u[x_2(t), t]$ on puisse écrire

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} u(x,t)\ dx\right) - \frac{1}{2}\left[u^2\right]_{x_1(t)}^{x_2(t)} = 0\ . \tag{2}$$

5) Appliquer la formule de Leibnitz pour dériver l'intégrale par rapport au temps en supposant que $u(x,t)$ est continue. En déduire le bilan local.
6) Appliquer la formule de Leibnitz pour dériver l'intégrale par rapport au temps en supposant que $u(x,t)$ admet une discontinuité en un point $x_c(t)$ mobile de vitesse $w(t) = \dot{x}_c(t)$.
7) Écrire le bilan local et l'équation de saut découlant de ce modèle. Comparer ce troisième modèle avec les deux précédents.

Corrigé page **??**

EXERCICE 0.2 Ondes de crues non linéaires

On considère l'écoulement d'une lame d'eau d'épaisseur $h(x,t)$ et de vitesse moyenne $U(x,t)$ sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale.

On suppose que cet écoulement à surface libre est régi par le modèle suivant :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial\,(U\,h)}{\partial x} = 0, \qquad 0 = g\sin\alpha - \frac{C_f}{2}\frac{U|U|}{h} \tag{3}$$

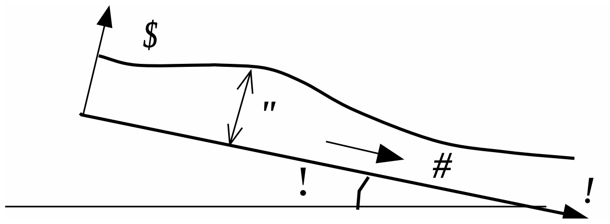

Figure 1: *Écoulement d'une lame d'eau de hauteur h et de vitesse U sur un pan incliné faisant un angle α avec l'horizontale.*

où g est la gravité et C_f est un coefficient de frottement constant. On suppose que la vitesse moyenne $U(x,t)$ reste toujours positive.

1) Quelles lois de conservation décrivent les équations du modèle et quelles approximations ont été utilisées.
2) Montrer que l'on peut éliminer U pour ne conserver qu'une équation en h que l'on écrira.
3) En invoquant les lois de conservation de la mécanique dont découlent le modèle, montrer que la formulation intégrale de la loi de conservation de la grandeur $\int_a^b h(x,t)dx$ s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b h(x,t)dx + \kappa\, h^{\frac{3}{2}}(b,t) - \kappa\, h^{\frac{3}{2}}(a,t) = 0 \tag{4}$$

   pour tout intervalle fixe $[a,b]$ pris sur l'axe des x.
4) Montrer que l'on peut d'éduire l'équation aux dérivée partielle de la question précédent à partir de cette formulation intégrale. La réciproque est-elle vraie ? Quelle équation manque-t-il pour remonter à la formulation intégrale ?

On suppose que $\kappa = 1\ \mathrm{m}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{s}^{-1}$ et on considère la condition initiale $h(x,0) = h_0 + \frac{1}{2}\Delta h\,[1 - \tanh(k\,x)]$ avec $h_0 = 1$ m, $\Delta h = 1.25$ m et $k = 10^{-1}\ \mathrm{km}^{-1}$.

5) Écrire les équations des courbes caractéristiques. Tracer sommairement ces courbes dans le demi-plan plan (x,t) avec $t \geq 0$.
6) Donner l'expression de l'invariant de Riemman et tracer sommairement les profils de cette grosse crue à différents instants représentatifs de son évolution. Indiquer comment varie l'extension spatiale du profil de crue.
7) Calculer la valeur numérique de la vitesse de propagation du ressaut longtemps après sa formation lorsque sa hauteur est proche de Δh.
8) Commenter la pertinence de ce modèle pour décrire certains phénomènes dévastateurs observés dans la nature.

Corrigé page **??**

EXERCICE 0.3 Vidange par contrôle de la vitesse

On considère une couche fluide dans un canal à fond horizontal situé à droite d'une écluse positionnée en $x = 0$. On suppose que la dynamique de l'écoulement obéit au modèle des équations de Saint-Venant sans frottement ($C_f = 0$). On suppose que la vitesse $U = U_e(t)$ est imposée au niveau de l'écluse de manière à vider le canal. À l'instant $t = 0$, le niveau d'eau est h_0 et la vitesse est nulle. Pour $t \in [0, t_f]$, on impose $U_e(t) = \beta\, t$ avec $\beta < 0$ et pour $t \geq t_f$, on impose $U_e(t) = U_f = \beta\, t_f$. On suppose que $|U_f| < \frac{2}{3} c_0$ avec $c_0 = \sqrt{g\, h_0}$.

1) Tracer dans le quart de plan (x, t) les deux régions d'écoulements uniformes ainsi que la région de l'onde simple.
2) Calculer la hauteur d'eau h_f de l'écoulement uniforme final.
3) Indiquer les équations des deux droites délimitant la région de l'onde simple.
4) En déduire la longueur $L(t)$ séparant les deux régions uniforme du canal à l'instant t.
5) Calculer la hauteur d'eau $h_e(t) = h(0, t)$ au niveau de l'écluse.
6) Donner l'équation de la droite caractéristique $\mathcal{C}_1$ passant par le point $(0, \tau)$ dans le plan (x, t).
7) Donner l'expression de la solution $h(x, t)$ et $U(x, t)$.
8) Que se passe-t-il si $U_f = -\frac{2}{3} c_0$? Est-il possible d'imposer une vitesse $|U_f|$ plus grande que $\frac{2}{3} c_0$?

Corrigé page **??**

EXERCICE 0.4 Intumescences non linéaires

On s'intéresse aux équations de Saint-Venant non linéaires afin de décrire l'évolution des grandes fluctuations de la surface libre ou de la vitesse. Les notations $h(x, t)$ et $U(x, t)$ désignent la hauteur d'eau et la vitesse de toute la couche d'eau. On suppose que le fond est horizontal et que l'on peut négliger le frottement.

On s'intéresse à l'évolution non-linéaire de la couche d'eau dans un canal infini, à partir des conditions initiales $h(x, 0) = h_i(x)$ et $U(x, 0) = U_i(x)$

définies de la façon suivante :

$$\begin{array}{llll} h_i(x) = h_1 & \text{et} \quad U_i(x) = U_1 & \text{pour} & x < 0 \\ h_i(x) = h_0 & \text{et} \quad U_i(x) = U_0 & \text{pour} & x > 0 \end{array}$$

où $h_1 > h_0$ sont deux hauteurs.

On considére tout d'abord le cas $U_1 = -2\sqrt{g\, h_1}$ et $U_0 = -2\sqrt{g\, h_0}$.

1) Écrire la définition des courbes caractéristiques $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et des invariants de Riemann $J_1(h, U)$ et $J_2(h, U)$ pour ce problème. Calculer la valeur de l'invariants de Riemann $J_1(h, U)$ pour un point (x, t) quelconque du demi-plan, en supposant que la solution reste continue pour tout temps (il n'y a pas formation de choc).
2) En déduire que la région 0 comprise entre la demi-droite ($t = 0$, $x \geq 0$) et la demi-droite ($x = -3\, c_0\, t$, $t \geq 0$) avec $c_0 = \sqrt{g\, h_0}$ est caractérisée par un écoulement uniforme.
3) En déduire que la solution divise le demi-plan (x, t) en deux écoulements uniformes séparés par une onde centrée. Indiquer les équations des deux demi-droites délimitant cette onde simple dans le demi-plan (x, t).
4) Calculer les valeurs $h(x, t)$ et $U(x, t)$ de la solution pour un point (x, t) compris entre ces deux demi-droites. En déduire le tracé des profils spatiaux de la solutions pour un temps $t > 0$.
5) Déduire de ce qui précède la largeur $L(t)$ de l'intumescence solution des équations.

On considére maintenant le cas $U_1 = \sqrt{\frac{g(h_1-h_0)^2(h_1+h_0)}{2\, h_1\, h_0}}$ et $U_0 = 0$.

6) Écrire les équations de sauts entre les régions 1 et 0, respectivement caractérisés par les écoulements uniformes $(h, U) = (h_1, U_1)$ et $(h, U) = (h_0, 0)$, en supposant qu'un tel choc existe.
7) Vérifier que la valeur de U_1 indiquée dans l'énoncée est bien solution de ces relations de saut et donner la valeur de la vitesse du choc w.
8) Représenter graphiquement la solution en divisant le demi-plan (x, t) en régions et en traçant les profils spatiaux.

On considère enfin le cas $U_1 = U_0 = 0$.

9) La solution est modélisée par une onde de détente centrée et un choc centrée séparant trois écoulements uniformes, l'écoulement uniforme central étant noté $(h, U) = (h_3, U_3)$. Montrer que h_3 s'obtient en résolvant l'équation implicite $\sqrt{h_1} - \sqrt{h_3} = \sqrt{\frac{(h_3-h_0)^2}{4\, h_0\, h_3}\, \frac{h_3+h_0}{2}}$ puis expliciter la solution dans tout le demi-plan (x, t) en fonction de h_3.

Corrigé page **??**