

Dérivation des équations de Saint Venant

Objectif : Exposer la dérivation des “équations de Saint Venant” dans la configuration la plus simple : écoulement 2D vertical, fond plat, viscosité turbulente constante. Ces équations constituent le modèle de base de l’hydraulique à surface libre.

1 Modèle 2D turbulent

2 Approximations de milieu peu profond

3 Modèles 1D intégrés sur la verticale

1 Modèle 2D turbulent

Équations de Navier-Stokes incompressibles 2D plan vertical et condition aux limites cinématique sur la surface libre mobile. On doit donc prendre en compte le caractère turbulent des écoulements et on choisit ici de le modéliser par une viscosité turbulente constante.

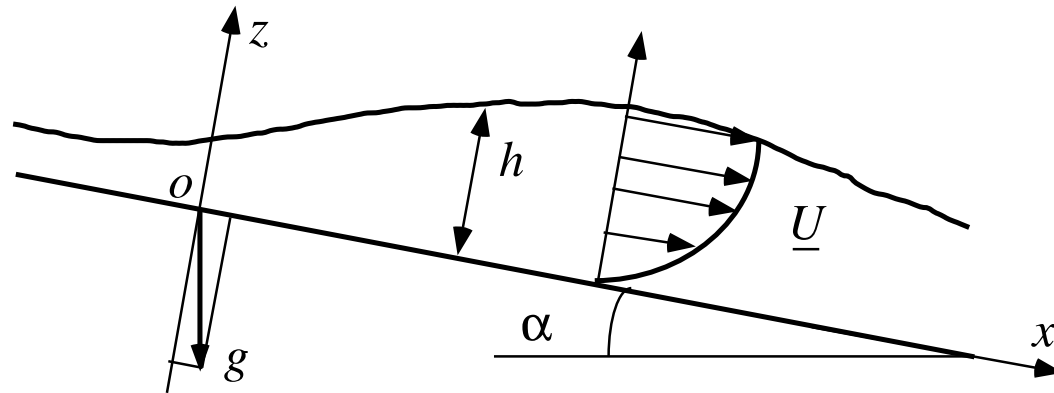
1.1 Équations de Navier-Stokes incompressibles 2D

1.2 Condition aux limites cinématique de surface libre

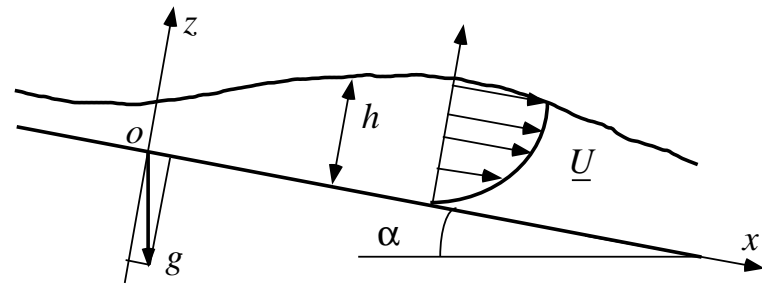
1.3 Conditions aux limites de l'écoulement

1.4 Viscosité turbulente

1.1 Équations de Navier-Stokes incompressibles 2D



$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \rho_0 \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\operatorname{grad}} p + \rho_0 \underline{g} + \rho_0 \nu_n \Delta \underline{U}$$



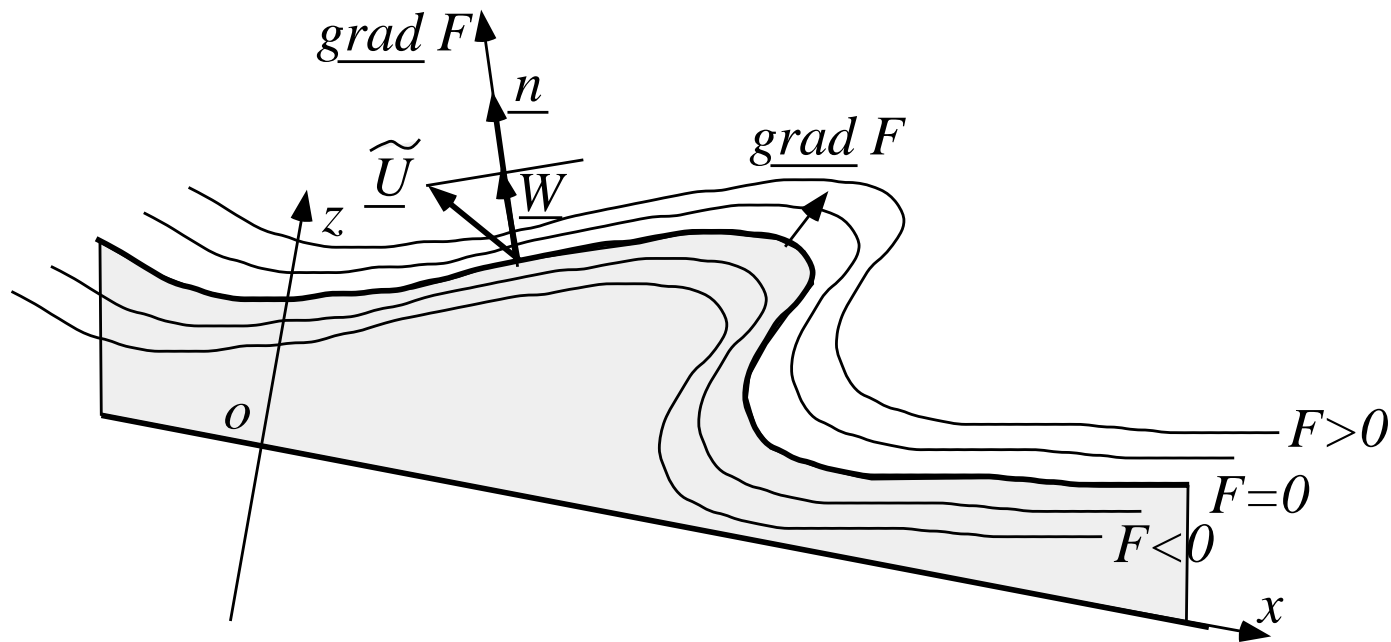
Cas bi-dimensionnel :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \alpha + \nu_n \Delta u$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g \cos \alpha + \nu_n \Delta w .$$

1.2 Condition aux limites cinématique de surface libre



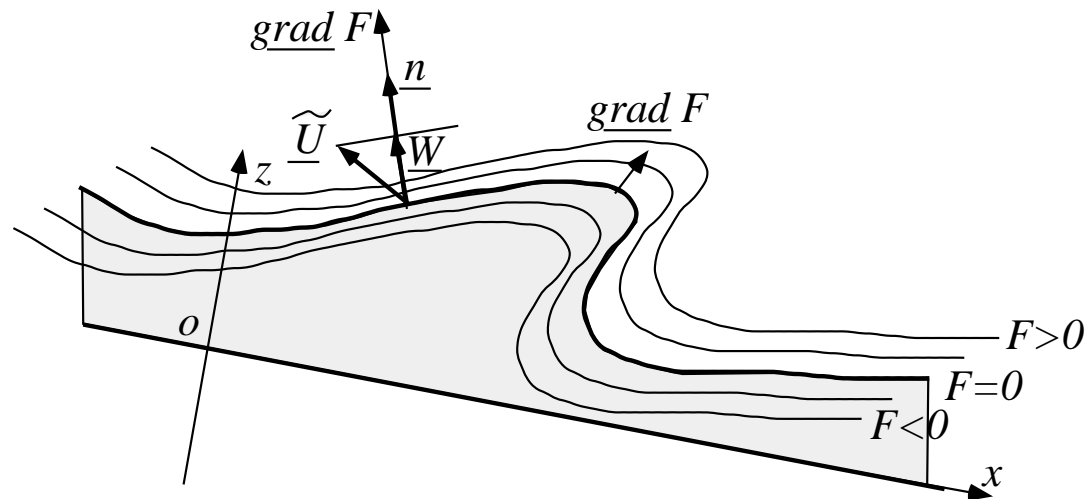
Cas général : $F(x, z, t) = 0$

Cas univalué : $F(x, z, t) = z - h(x, t) = 0$.

Particule fictive $\tilde{\underline{x}}(t)$: $F[\tilde{x}(t), \tilde{z}(t), t] = 0$ pour tout t est équivalent à

$$\frac{d}{dt} \{F[\tilde{x}(t), \tilde{z}(t), t]\} = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \underline{\tilde{U}}(t) \cdot \underline{\text{grad}} F \right] (\tilde{x}, \tilde{z}, t) = 0$$

où $\underline{\tilde{U}} = \frac{d}{dt} \tilde{\underline{x}}(t)$ est la vitesse de la particule fictive.



Vitesse normale : $W = \underline{\tilde{U}} \cdot \underline{n} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial t}}{\|\underline{\text{grad}} F\|}$ avec $\underline{n} = \frac{\underline{\text{grad}} F}{\|\underline{\text{grad}} F\|}$.

La condition aux limites cinématique $\underline{U} \cdot \underline{n} = W$ sur la surface libre :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} F = 0 \quad \text{pour} \quad F(x, z, t) = 0 .$$

Une particule fluide non fictive appartenant à la surface à un instant donné y reste pour toujours.

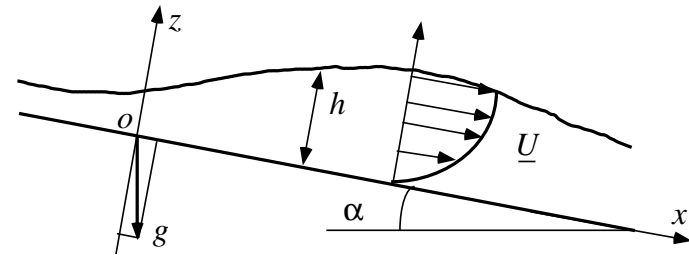
1.3 Conditions aux limites de l'écoulement

Au fond :

$$u = w = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0 .$$

Sur la surface libre $F(x, z, t) = z - h(x, t)$:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w \quad \text{pour} \quad z = h(x, t) .$$



Conditions dynamique à la surface :

$$\underline{\underline{\sigma}} \underline{n} = -p_a \underline{n} \quad \text{pour} \quad z = h(x, t)$$

Tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(x, z, t)$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2 \rho_0 \nu_n \underline{\underline{D}}$$

Tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}(x, z, t)$:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

1.4 Viscosité turbulente

Viscosité moléculaire $\nu_n \sim 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ dans l'eau.

Solutions stationnaires : $u(x, z, t) = U(z)$, $w = 0$ et $h(x, t) = h_n$ avec

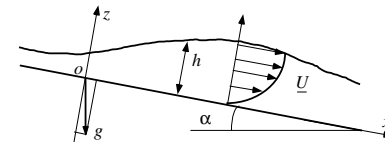
$$0 = g \sin \alpha + \nu_n U''(z)$$

et les conditions aux limites $U(0) = 0$ et $U'(h_n) = 0$

Équilibre entre la force de gravité et les forces visqueuses.

$$U(z) = -\frac{g \sin \alpha}{2 \nu_n} z (z - 2 h_n) .$$

Vitesse maximale : $U(h_n) \sim 500 \text{ m/s}$ pour $h_n = 10 \text{ cm}$ et une pente de 1 % ($\text{tg } \alpha \sim \alpha \sim 10^{-2}$),



Valeur de vitesse est beaucoup plus grande que les vitesses observées en laboratoire ou dans la nature.

Au-delà d'une certaine vitesse, l'écoulement devient **turbulent**.

Ici, modélisation turbulente la plus simple : remplacer la viscosité moléculaire ν_n par un viscosité effective constante

$$\nu_e = \nu_n + \nu_t$$

Viscosité turbulente constante ν_t censée représenter l'effet des petits tourbillons sur l'écoulement moyen.

Les champs \underline{U} et p , solutions de ces nouvelles équations, doivent donc être considérés comme décrivant des champs moyens, les fluctuations de vitesses ou de pression étant prises en compte dans le terme de viscosité turbulente.

2 Approximations de milieu peu profond

L'adimensionnalisation des équations de Navier-Stokes incompressibles conduit à quatre nombres sans dimensions. On étudie alors toutes les approximations de milieu peu profond conduisant à des modèles différents.

2.1 Passage à la limite des milieux peu profonds

2.2 Adimensionnalisation des équations de Navier-Stokes

2.3 Classification des approximations

2.1 Adimensionnalisation des équations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \alpha + \nu_e \Delta u \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g \cos \alpha + \nu_e \Delta w \end{aligned}$$

Conditions aux limites :

$$u = w = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0$$

$$\begin{pmatrix} -(p - p_a) + 2 \rho_0 \nu_e \frac{\partial u}{\partial x} & \rho_0 \nu_e \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \rho_0 \nu_e \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & -(p - p_a) + 2 \rho_0 \nu_e \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

et $\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w$ pour $z = h(x, t)$.

Adimensionnalisation $u(x, z, t) = U_0 u^*(x^*, z^*, t^*)$ avec :

$$x = L_0 x^*, \quad z = h_0 z^*, \quad t = \frac{L_0}{U_0} t^*,$$

$$u = U_0 u^*, \quad w = U_0 \frac{h_0}{L_0} w^* \quad \text{et} \quad p = \rho_0 U_0^2 p^*$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} &= 0 \\ \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\text{tg } \alpha}{\epsilon F_r^2} + \frac{1}{\epsilon R_e} \Delta^* u^* \\ \epsilon^2 \left(\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) &= -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} - \frac{1}{F_r^2} + \frac{\epsilon}{R_e} \Delta^* w^* \\ \text{avec} \quad \Delta^* &= \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} \end{aligned}$$

Nombres sans dimensions

$$\epsilon = \frac{h_0}{L_0}, \quad F_r = \frac{U_0}{\sqrt{g \cos \alpha h_0}}, \quad R_e = \frac{h_0 U_0}{\nu_e}, \quad \text{tg } \alpha$$

Conditions aux limites adimensionnées au fond :

$$u^* = w^* = 0 \quad \text{pour} \quad z^* = 0$$

Conditions aux limites adimensionnées sur la surface libre :

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_e} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \epsilon (p^* - p_a^*) \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \frac{\epsilon^2}{R_e} \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*} - 2 \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \right) &= 0 \\ -(p^* - p_a^*) + \frac{\epsilon}{R_e} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + 2 \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) - \frac{\epsilon^2}{R_e} \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} &= 0 \\ \text{et} \quad \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} &= w^* \quad \text{pour} \quad z^* = h^*(x^*, t^*). \end{aligned}$$

2.2 Passage à la limite des milieux peu profonds

Milieu peu profond : $\epsilon \ll 1$

$$F_r = O(1) \quad \text{mais} \quad \left(\frac{1}{R_e} \text{ et } \text{tg } \alpha \right) \in \{O(1), O(\epsilon), \ll \epsilon\}$$

Dans tous ces cas :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} &= 0 \\ \epsilon \left[\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right] &= -\epsilon \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\text{tg } \alpha}{F_r^2} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \\ 0 &= -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} - \frac{1}{F_r^2} \end{aligned}$$

Conditions aux limites adimensionnées sur la surface libre :

$$\begin{aligned} u^* = w^* = 0 & \quad \text{pour } z^* = 0 \\ \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = 0, \quad p^* = p_a & \quad \text{et} \quad \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} = w^* & \quad \text{pour } z^* = h^*(x^*, t^*) \end{aligned}$$

2.3 Classification des approximations

L'ordre de grandeurs $\frac{1}{Re}$ et $\text{tg } \alpha$ détermine les termes à négliger. On peut revenir alors aux équations avec dimensions. Par exemple, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad p = p_a \quad \text{et} \quad \begin{array}{ll} u = w = 0 & \text{pour } z = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w & \text{pour } z = h(x, t) \end{array}$$

La pression vérifie toujours :

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g' \quad \text{avec } g' = g \cos \alpha$$

et s'écrit donc :

$$p(x, z, t) = p_a - \rho_0 g' [z - h(x, t)]$$

Approximations dans le cas $\epsilon \ll 1$ et $F_r = O(1)$

$\frac{1}{Re} = O(1)$			Ondes de crues
$\frac{1}{Re} = O(\epsilon)$	Saint-Venant pente nulle	Équations de Saint-Venant cas général	
$\frac{1}{Re} \ll \epsilon$	Saint-Venant pente et frottement nuls	Saint-Venant frottement nul	
	$\text{tg } \alpha \ll \epsilon$	$\text{tg } \alpha = O(\epsilon)$	$\text{tg } \alpha = O(1)$

Approximation des ondes de crues : $\left[\frac{1}{Re} = O(1), \text{tg } \alpha = O(1) \right]$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$0 = g \sin \alpha + \nu_e \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} .$$

Approximation Saint Venant : $\left[\frac{1}{Re} = O(\epsilon), \text{tg } \alpha = O(\epsilon) \right]$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g \sin \alpha + \nu_e \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} .$$

Approximation pente et frottement nuls : $\left[\frac{1}{Re} \ll \epsilon, \text{tg } \alpha \ll \epsilon \right]$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g' \frac{\partial h}{\partial x} .$$

3 Modèles 1D intégrés sur la verticale

Les différents modèles sont ici intégrés sur la verticale.

Il faut paramétriser certains termes.

On obtient alors les équations de Saint-Venant et ses variantes.

3.1 Utilisation de la formule de Leibnitz

3.2 Équation de conservation de la masse

3.3 Équation de conservation de la quantité de mouvement

3.4 Paramétrisations supplémentaires

3.5 Équations de Saint-Venant

3.1 Utilisation de la formule de Leibnitz

Approximation des équations de Saint-Venant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g \sin \alpha + \nu_e \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\end{aligned}$$

avec les conditions aux limites

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad p = p_a \quad \text{et} \quad \begin{aligned} u = w = 0 & \quad \text{pour} \quad z = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w & \quad \text{pour} \quad z = h(x, t) \end{aligned}$$

On définit la vitesse longitudinale moyenne $U(x, t)$:

$$U(x, t) = \frac{1}{h(x, t)} \int_0^{h(x, t)} u(x, z, t) dz$$

Formule de Leibnitz :

$$\frac{d}{ds} \int_{a(s)}^{b(s)} f(s, z) dz = \int_{a(s)}^{b(s)} \frac{\partial f}{\partial s}(s, z) dz + \frac{db}{ds}(s) f[s, b(s)] - \frac{da}{ds}(s) f[s, a(s)]$$

valable pour toute fonction $f(s, z)$ intégrable et dérivable et tout intervalle $[a(s), b(s)]$ dont les bornes varient avec s .

3.2 Équation de conservation de la masse

L'intégration sur la verticale de $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ conduit à

$$\int_0^{h(x,t)} \frac{\partial u}{\partial x}(x, z, t) dz + \int_0^{h(x,t)} \frac{\partial w}{\partial z}(x, z, t) dz = 0$$

En appliquant la formule de Leibnitz et en intégrant $\frac{\partial w}{\partial z}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(x,t)} u dz - u[x, h(x, t), t] \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) + w[x, h(x, t), t] - w(x, 0, t) = 0$$

Comme $w = 0$ pour $z = 0$ et $\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w$ pour $z = h(x, t)$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} [h(x, t) U(x, t)] + \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

3.3 Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u u)}{\partial x} + \frac{\partial(w u)}{\partial z} = -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g \sin \alpha + \nu_e \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

En utilisant la formule de Leibnitz, on obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u \, dz - \frac{\partial h}{\partial t} u|_{z=h} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 \, dz - \frac{\partial h}{\partial x} u^2|_{z=h} + \left[wu \right]_{z=0}^{z=h} = \\ -g' h \frac{\partial h}{\partial x} + g \sin \alpha h + \nu_e \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z=0}^{z=h} \end{aligned}$$

En utilisant les conditions aux limites, on a :

$$\frac{\partial(U h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 \, dz + g' h \frac{\partial h}{\partial x} = gh \sin \alpha - \frac{\tau_f}{\rho_0}$$

où $\tau_f(x, t) = \rho_0 \nu_e \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0, t)$ est la contrainte de cisaillement au fond.

3.4 Paramétrisations supplémentaires

On cherche un modèle ne faisant intervenir que $U(x, t)$ et $h(x, t)$.

En notant $u(x, z, t) = U(x, t) + \hat{u}(x, z, t)$ on a :

$$\int_0^h u^2 dz = U^2 h + \int_0^h \hat{u}^2 dz .$$

Paramétrisation de l'écart-type :

$$\int_0^h \hat{u}^2 dz = \beta U^2 h .$$

On peut souvent négliger ce terme en posant $\beta = 0$

Paramétrisations du cisaillement au fond τ_f

On définit la grandeur sans dimension C_f par :

$$\tau_f = \frac{1}{2} C_f \rho_0 U |U|$$

- Une première paramétrisation : C_f est constant.
- Corrélation semi-empirique de Colebrook : paramétrisation $C_f(U, h)$ en résolvant

$$\sqrt{\frac{1}{C_f}} = 3,48 - 4 \log_{10} \left(\frac{z_0}{2h} + \frac{9,35 \nu_n}{4hU \sqrt{C_f}} \right)$$

où z_0 est la rugosité du fond et ν_n la viscosité *moléculaire*

- Paramétrisation de Manning-Strickler :

$$C_f(h) = \frac{2g}{K^2 h^{1/3}}$$

où K est le “nombre de Strickler” (avec dimension !)

La formulation adimensionnelle s’écrit

$$C_f(h) = \Phi_{MS} \left(\frac{z_0}{h} \right)^{1/3}$$

où z_0 est la rugosité du fond et $\Phi_{MS} \sim 0,1$

L’équilibre $0 = g \sin \alpha - \tau_f$ conduit à

$$U = K \sqrt{\sin \alpha} h^{5/3} .$$

3.5 Équations de Saint-Venant

Équations de Saint-Venant : $\frac{1}{Re} \sim \text{tg } \alpha \sim \epsilon \ll 1$ avec $F_r \sim 1$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} &= g \sin \alpha - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h}\end{aligned}$$

La pression $p(x, z, t)$ est connue (pression hydrostatique)

Pente nulle $\alpha = 0$: $\text{tg } \alpha \ll \epsilon$

Frottement nul $C_f = 0$: $\frac{1}{Re} \ll \epsilon$

Approximation des ondes de crues : $\frac{1}{Re} \sim \text{tg } \alpha \sim Fr \sim 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \\ 0 &= g h \sin \alpha - \frac{C_f}{2} U |U|. \end{aligned}$$

On peut éliminer U des équations

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0 ,$$

où l'expression de la fonction $c(h)$ dépend du choix de la paramétrisation du coefficient de frottement $C_f(h, U)$.

Conclusion

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} &= g \sin \alpha - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h}\end{aligned}$$

- Équations de Saint-Venant complètes : cette approximation correspond au cas $\epsilon \rightarrow 0$, $\frac{1}{Re} = O(\epsilon)$ et $\text{tg } \alpha = O(\epsilon)$.
- Ondes de crues : cette approximation correspond au cas $\epsilon \rightarrow 0$, $\frac{1}{Re} = O(1)$ et $\text{tg } \alpha = O(1)$. Il suffit de négliger le terme d'accélération.
- Pente ou frottement nuls : ces approximations correspondent aux cas $\epsilon \rightarrow 0$, $\frac{1}{Re} \ll \epsilon$ ou $\text{tg } \alpha \ll \epsilon$. Il suffit de négliger les termes $g \sin \alpha$ ou les termes de frottement ($C_f = 0$).

Équation de Saint Venant 2D :

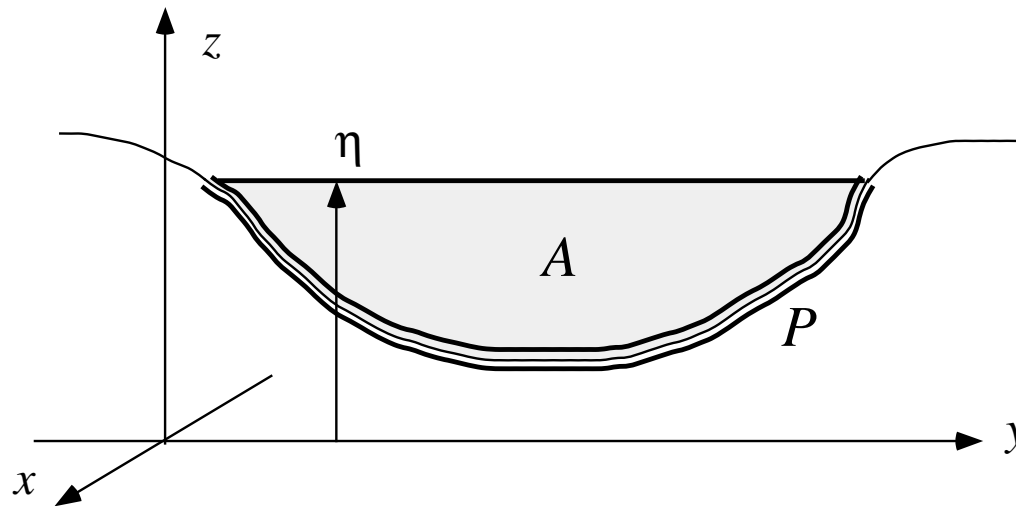
$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial y} + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g' \frac{\partial h}{\partial x} &= g \sin \alpha - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h} \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g' \frac{\partial h}{\partial y} &= -\frac{C_f}{2} \frac{V|V|}{h} \end{aligned}$$

Cas d'un fond d'équation $z = Z_f(x)$

On note $\text{tg } \alpha = Z'_f(x)$, $z = \eta(x, t)$ l'équation de la surface libre et $h(x, t) = \eta(x, t) - Z_f(x)$ l'épaisseur de la couche fluide :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial \eta}{\partial x} &= g \sin \alpha - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h} \end{aligned}$$

Cours d'eau :



Section $A(\eta)$ et le périmètre mouillé $P(\eta)$ fonctions de la côte η .

Les équations de Saint-Venant 1D s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + U \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial \eta}{\partial x} &= g \sin \alpha - \frac{C_f}{2} \frac{U|U| P}{A} \end{aligned}$$

FORMULAIRE

MODÈLE 2D TURBULENT

Équations de Navier-Stokes incompressibles 2D :

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \rho_0 \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\operatorname{grad}} p + \rho_0 \underline{g} + \rho_0 \nu_n \Delta \underline{U}$$

Conditions aux limites

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}} \underline{n} = -p_a \underline{n} \quad \text{pour} \quad z = h(x, t) .$$

$$u = w = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0 .$$

avec $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{I} + 2 \rho_0 \nu_n \underline{\underline{D}}$

Viscosité turbulente

Viscosité moléculaire ν_n remplacée par $\nu_e = \nu_n + \nu_t$

APPROXIMATION DE MILIEU PEU PROFOND

Équations adimensionnées : $\Delta^* = \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} &= 0 \\ \epsilon \left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) &= -\epsilon \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\text{tg } \alpha}{F_r^2} + \frac{1}{Re} \Delta^* u^* \\ \epsilon^2 \left(\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) &= -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} - \frac{1}{F_r^2} + \frac{\epsilon}{Re} \Delta^* w^* . \end{aligned}$$

Approximation pour $\epsilon \rightarrow 0$, $\frac{1}{Re} = O(\epsilon)$ et $\text{tg } \alpha = O(\epsilon)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g \sin \alpha + \nu_e \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{cases}$$

avec les CL : $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ et $\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w$ pour $z = h(x, t)$
 $u = w = 0$ pour $z = 0$

ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT

Paramétrisation du frottement

$$\tau_f = \frac{1}{2} C_f \rho_0 U |U| \quad \text{avec } C_f(h, U) \text{ sans dimension .}$$

$$\text{Manning-Strickler : } C_f(h) = \frac{2g}{K^2 h^{1/3}} = 0,1 \left(\frac{z_0}{h} \right)^{1/3}$$

Équations de Saint-Venant pour $\frac{1}{Re} = O(\epsilon)$ et $\text{tg } \alpha = O(\epsilon)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} &= g \sin \alpha - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h} . \end{aligned}$$

Approximation des ondes de crues : $\frac{1}{Re} = O(1)$ et $\text{tg } \alpha = O(1)$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{avec } g \sin \alpha = \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h} .$$