CORRIGÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

Corrigé 0.1 Intégration sur la hauteur

1)Les approximations conduisant à ce modèle sont celle des ondes de crues. **2)**On remarque que la seule dérivation par rapport au temps intervient dans la condition cinématique et que la pression est découplée de la vitesse. Si $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$, les équations sont stationnaires et le champ de vitesse et de pression ne dépendent donc pas du temps. **3)**L'intégration de l'équation pour la pression conduit à $p(x,z,t) = p_a - \rho_0\, g\, [z - h(x,t)]$. **4)**En appliquant la formule de Leibnitz, on obtient $\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}\, dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u\, dz - u|_h \frac{\partial h}{\partial x}$. Comme $\int_0^h \frac{\partial w}{\partial z}\, dz = [w]_0^h = w|_h$ (en utilisant $w|_0 = 0$) et $\frac{\partial h}{\partial t} + u|_h \frac{\partial h}{\partial x} = w|_h$, l'intégration de l'équation de continuité et la définition de U conduisent à $\frac{\partial}{\partial x}(h\, U) + \frac{\partial h}{\partial t} = 0$. **5)**Comme $\int_0^h \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\, dz = \left[\frac{\partial u}{\partial z}\right]_0^h$ et $\frac{\partial u}{\partial z}|_h = 0$, l'intégration de l'équation en u conduit à $-\tau_f/\rho_0 + g\, h\, \sin\alpha = 0$. **6)**La grandeur τ_f est exprimée en Pascal (N/m^2). C'est la force par unité de surface qu'exerce le fluide sur le fond. Cette force est parallèle au fond et dans le sens de l'écoulement. La force $-\tau_f$ est donc la force exercée par le fond sur l'écoulement pour le freiner ou, comme dans cette approximation, compenser exactement la force surfacique $\rho_0\, g\, h\, \sin\alpha$ due à la gravité. **7)**Avec la paramétrisation choisie pour τ_f, on obtient les équations de Saint-Venant dans l'approximation des ondes de crues qui s'écrivent $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (U\, h)}{\partial x} = 0$ et $0 = g \sin\alpha - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h}$.

Corrigé 0.2 Analyse dimensionnelle et τ_f

1)Les notations et les dimensions sont les suivantes : $h(x,t)$ est la hauteur d'eau (m), $U(x,t)$ est la vitesse du fluide moyennée sur la verticale (m/s), α est l'angle du fond avec l'horizontale (sans dimension), g est la gravité (m/s^2), $g' = g\ \cos\alpha$ a la même dimension que la gravité, ρ_0 est la masse volumique (kg/m^3) et τ_f est la contrainte de cisaillement (Pa = N/m^2 = kg s^{-2} m^{-1}). **2)**En notant (M, L, T) les unités de longueur, temps et masse, les unités de ρ_0, U et τ_f sont $[\rho_0] = M\, L^{-3}$, $[U] = L\, T^{-1}$ et $[\tau_f] = M\, L^{-1}\, T^{-2}$. L'analyse dimensionnelle conduit à la relation $\tau_f = \Phi\ \rho_0\ U^2$ où Φ est une constante sans dimension. **3)**L'analyse dimensionnelle conduit encore à la relation $\tau_f = \Phi\ \rho_0\ U^2$, comme pour la question précédente. L'expression de τ_f ne dépend donc pas de h avec ces hypothèses. **4)**L'analyse dimensionnelle indique que $C_f = \Phi$ est une constante sans dimension qui ne dépend donc ni de ρ_0, ni de U et ni de h. **5)**Les unités de z_0 et ν_e sont $[z_0] = L$ et $[\nu_e] = L^2\ T^{-1}$. L'analyse dimensionnelle conduit à l'expression $C_f = \phi(R_u, R_e)$ avec $R_u = z_0/h$ et $R_e = U\ h/\nu_e$. **6)**L'expression de C_f, solution implicite de la corrélation semiempirique de Colebrook, est de la forme $C_f = \phi(R_u, R_e)$, issue de l'analyse dimensionnelle de la question précédente. **7)**La contrainte de cisaillement τ_f rend compte des efforts visqueux exercés dans les couches limites près de parois. Ces efforts ne dépendent que des cisaillements de vitesse (fluides newtoniens). Ils ne dépendent donc pas directement de g ou α. **8)**L'équilbre $g\sqrt{\sin\alpha} = \frac{\tau_f}{\rho_0\, h} = \frac{1}{2}\, C_f\, \frac{U^2}{h}$ et la loi de Manning-Strickler $U = K\,\sqrt{\sin\alpha}\, h^{2/3}$ entraînent $C_f = \frac{2\,g}{K^2} h^{-1/3}$ et que $C_f(\rho_0, z_0, h)$ ne dépend, au plus, que de ρ_0, z_0 et h. Par analyse dimensionnelle il ne dépend pas de ρ_0. On a donc $C_f = \Phi_{MS}\, \left(\frac{z_0}{h}\right)^{1/3}$ où Φ_{MS} est une constante arbitraire sans dimension. **9)**On a donc $K^2 = (2\,g/\Phi_{MS})\; z_0^{-1/3}$ ce qui s'écrit $K = (2\,g/\Phi_{MS})^{1/2}\;\; z_0^{-1/6}$. L'unité de K est en $\text{m}^{1/3}\ \text{s}^{-1}$. On peut donc dire que l'estimation d'un nombre de Strickler est équivalente à l'estimation d'une longueur de rugosité z_0 dans un champ de gravité g donné. La constante sans dimension Φ_{MS} peut être alors vue comme une constante universelle indépendant de g.

Corrigé 0.3 Ondes de crues linéaires et non linéaires

1)Les approximations conduisant à ce modèle sont celles des ondes de crues. **2)**Une solution constante (h_n, U_n) doit vérifier la relation $U_n|U_n| = \frac{2}{C_f}\, g\, h_n\, \sin\alpha$. L'équation de continuité est trivialement satisfaite.

Ondes de crues linéaires

3)Les équations linéarisées autour de (h_n, U_n) s'écrivent $\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t} + U_n\, \frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x} + h_n\, \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial x} = 0$ et $2\, \widetilde{U}/U_n = \widetilde{h}/h_n$. **4)**En remplaçant $\widetilde{U} = \frac{1}{2} U_n\, \widetilde{h}/h_n$ par sa valeur on obtient l'équation $\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t} + \frac{3}{2} U_n\, \frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x} = 0$. **5)**Les équations du mouvement impliquent que U est connu une fois que h est connue (sauf ambiguïté de signe). La solution s'écrit $\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_1\; \left\{1 - \tanh\left[k\, \left(x - \frac{3}{2} U_n\, t\right)\right]\right\}$ et $\widetilde{U}(x,t) = \frac{U_n}{2h_n} \widetilde{h}(x,t)$ avec $U_n = \sqrt{\frac{2gh_n \sin\alpha}{C_f}} = \kappa\; h_n^{\frac{1}{2}}$ et donc $\frac{U_n}{2h_n} = \sqrt{\frac{g \sin\alpha}{2h_n C_f}} = \kappa\; h_n^{-\frac{1}{2}}$. **6)**Le profil initial se déplace sans déformation à la vitesse constante $\frac{3}{2} U_n$. Son extension spatiale $L \sim 1/k = 10$ km reste constante.

Ondes de crues non linéaires

7)En remplaçant $U = \sqrt{\frac{2\, g\, h\, \sin\alpha}{C_f}} = \kappa\; h^{\frac{1}{2}}$ dans l'équation de continuité, on obtient $\frac{\partial h}{\partial t} + \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left(h^{\frac{3}{2}}\right) = 0$. **8)**La loi de conservation de la masse sous forme intégrale s'écrit $\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b h\, dx + (hU)|_b - (hU)|_a = 0$. On remplaçant U par son expression en fonction de h on obtient $\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b h\, dx + q(h|_b) - q(h|_a) = 0$ avec

$q(h) = \kappa\, h^{\frac{3}{2}}$.

$\boxed{\text{Corrigé 0.4}}$ Approximation des ondes de crues

Équations de Navier-Stokes 2D

1)L'écoulement est incompressible car la divergence de la vitesse est nulle. **2)**La modélisation des mouvements turbulents par une loi de Fourier avec une viscosité ν_t revient à considérer que les petits tourbillons agissent à la manière du mouvement brownien des molécules, caractérisé, quant à lui, par la viscosité moléculaire classique ν_n. **3)**Les conditions $u = w = 0$ au fond traduisent l'adhérence du fluide visqueux à la paroi. La condition $\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} = w$, dite condition cinématique, traduit le fait que la composante de la vitesse du fluide normale à la surface libre est égale à la vitesse normale de cette surface. La dernière condition traduit l'égalité des forces de contact exercées sur la surface libre. **4)**Dans le cas $\nu_e = 0$, il ne reste plus que $w = 0$ comme condition aux limites au fond. En effet, seule la condition cinématique subsiste lorsque le fluide est non visqueux. À la surface, la condition cinématique est inchangée et la condition dynamique exprime juste la continuité de la pression $p = p_a$.

Modèle asymptotique

5)Les équations adimensionnées sont $\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0$, $\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^*\frac{\partial u^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\epsilon\, R_e}\left(\epsilon^2\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}}\right) + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\epsilon\, F_r^2}$ et $\epsilon^2\left(\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^*\frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right) = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{\epsilon}{R_e}\left(\epsilon^2\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}}\right) - \frac{1}{F_r^2}$. **6)**Les conditions aux limites adimensionnées sont $u^* = w^* = 0$ en $z^* = 0$ (au fond) et $\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial h^*}{\partial x^*} = w^*$ pour la condition cinématique sur la surface libre d'équation $z^* = h^*(x^*, t^*)$. Pour la condition dynamique sur cette même surface libre, elles sont $\frac{1}{R_e}\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \epsilon\,(p^* - p_a^*)\,\frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \frac{\epsilon^2}{R_e}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*} - 2\,\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\,\frac{\partial h^*}{\partial x^*}\right) = 0$ et $-(p^* - p_a^*) + \frac{\epsilon^2}{R_e}\left(-\frac{\partial u^*}{\partial z^*}\,\frac{\partial h^*}{\partial x^*} + 2\frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right) - \frac{\epsilon^3}{R_e}\,\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\,\frac{\partial h^*}{\partial x^*} = 0$. **7)**On calcule $\epsilon = 10^{-4}$, $R_e = 4\;10^2$, $F_r = 0.3$ et $\operatorname{tg}\alpha = 10^{-2}$. En posant $\gamma = 10^{-2}$, on a bien $\gamma \ll 1$ et $\epsilon = \gamma^2$, $R_e = R/\gamma$ avec $R = 4$, F_r d'ordre 1 et $\operatorname{tg}\alpha = T\gamma$ avec $T = 1$. **8)**Les équations dans la limite $\gamma = 0$ s'écrivent $\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0$ puis $0 = \frac{1}{R}\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} + \frac{T}{F_r^2}$ et $0 = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} - \frac{1}{F_r^2}$. **9)**Les conditions aux limites pour $\gamma = 0$ s'écrivent $u^* = w^* = 0$ en $z^* = 0$ (au fond) et $\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial h^*}{\partial x^*} = w^*$ pour la condition cinématique sur la surface libre d'équation $z^* = h^*(x^*, t^*)$ et $p^* = p_a^*$ puis $\frac{\partial u^*}{\partial z^*} = 0$ pour la condition dynamique sur cette même surface libre. **10)**Les équations en eaux très peu profondes, à faible pente et grand Reynolds ainsi obtenues s'écrivent $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ puis $0 = \nu_e\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + g\,\sin\alpha$ et $0 = -\frac{1}{\rho_0}\,\frac{\partial p}{\partial z} - g\,\cos\alpha$ avec les conditions aux limites $u(x,0,t) = w(x,0,t) = 0$ au fond du canal et les relations $\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} = w$, $p = p_a$ et $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ sur la surface libre d'équation $z = h(x, t)$. La pression est hydrostatique et il y a équilibre entre la force de gravité due à la pente et la friction turbulente proportionnelle au cisaillement de vitesse. Cette limite asymptotique est pertinente pour décrire la propagation des crues dont l'extension horizontale (dizaines de km) est grande devant la profondeur (quelques mètres) avec un frottement et une pente petits mais plus important que les forces d'accélération.