

COURS ÉCRIT

1	Modèle 2D turbulent	2
2	Approximations de milieu peu profond	6
3	Modèles 1D intégrés sur la verticale	10

Introduction

On présente tout d’abord les équations de Navier-Stokes incompressibles dans le cas d’un écoulement à surface libre, par exemple de l’eau en contact avec l’atmosphère. La formulation des conditions aux limites sur la surface libre est présentée en détail. Pour pouvoir modéliser des situations réalistes comme un écoulement sur un plan incliné, il est nécessaire de considérer une “paramétrisation” de la turbulence. On choisit ici le concept simple d’une viscosité turbulence constante.

Les équations de Saint-Venant (“shallow water equations” dans la littérature anglo-saxonne) se déduisent du modèle de Navier-Stokes dans le cas où la profondeur est faible devant l’échelle horizontale de variation de la surface libre et de la vitesse. On définit ainsi un petit paramètre ϵ . Pour présenter la dérivation des équations de Saint-Venant, on choisit la géométrie simple d’un plan incliné faisant un angle α avec l’horizontale et la restriction aux mouvements bi-dimensionnels dans un plan vertical.

L’approximation de milieu peu profond s’effectue en adimensionnant les équations de Navier-Stokes et en faisant tendre ϵ vers zéro, ainsi que d’autres nombres sans dimension comme l’inverse du nombre de Reynolds turbulent ou la pente du fond. Le nombre de Froude est ici d’ordre 1. En fonction du rapport entre ϵ et ces autres nombres sans dimension, on peut classifier les approximations obtenues en identifiant l’approximation des équations de Saint-Venant, l’approximation des ondes de crues et l’approximation pente ou frottement nuls.

1 Modèle 2D turbulent

On écrit tout d'abord les équations de Navier-Stokes incompressibles dans le cas d'un écoulement bi-dimensionnel dans un plan vertical. On explicite alors la formulation de la condition aux limites cinématique sur la surface libre mobile. Le calcul de l'écoulement laminaire sur un plan incliné montre que la viscosité moléculaire ne permet pas de compenser la gravité pour des cas réalistes. On doit donc prendre en compte le caractère turbulent des écoulements et on choisit ici de le modéliser par une viscosité turbulente constante.

1.1 Équations de Navier-Stokes incompressibles 2D

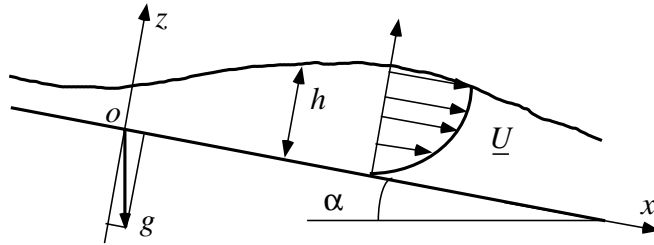


Figure 1: Canal incliné à fond plat

On considère un écoulement à surface libre bi-dimensionnel sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. En choisissant l'axe Ox parallèle au plan incliné, on note $(\underline{e}_x, \underline{e}_z)$ les vecteurs orthornormés du plan (x, z) . Le vecteur gravité s'écrit alors $\underline{g} = g \sin \alpha \underline{e}_x - g \cos \alpha \underline{e}_z$. On considère que le fluide est incompressible et que sa masse volumique ρ_0 est constante. On choisit l'origine des axes au fond de telle sorte que $z = 0$ soit l'équation du plan incliné.

Dans le cas général, les équations de Navier-Stokes incompressibles s'écrivent

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \rho_0 \frac{d\underline{U}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \rho_0 \underline{g} + \rho_0 \nu_n \Delta \underline{U} \quad (1)$$

où \underline{U} est le champ de vitesse, $\frac{d}{dt} \underline{U} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{U} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U}$ sa dérivée particulaire (l'accélération), p le champ de pression, ν_n la viscosité cinématique moléculaire et $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ l'opérateur Laplacien.

Dans le cas bi-dimensionnel étudié ici, on note $\underline{U}(x, z, t) = u(x, z, t) \underline{e}_x + w(x, z, t) \underline{e}_z$ le champ de vitesse et $p(x, z, t)$ le champ de pression. Les

équations de Navier-Stokes s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \alpha + \nu_n \Delta u \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g \cos \alpha + \nu_n \Delta w . \end{aligned} \quad (2)$$

1.2 Condition aux limites cinématique de surface libre

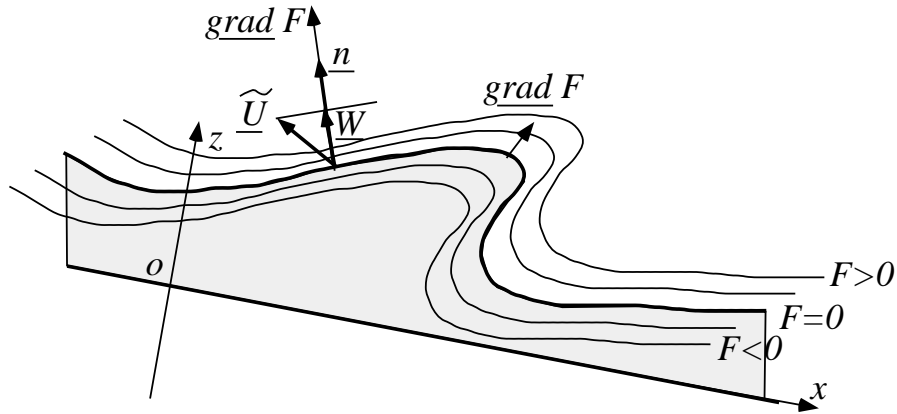


Figure 2: Condition aux limites cinématique pour une surface libre mobile

Une première condition aux limites, appelée condition cinématique, consiste à écrire que la vitesse de la surface libre est compatible avec celle des particules fluides. Lorsque la surface est immobile, cette condition s'écrit $\underline{U} \cdot \underline{n} = 0$ où \underline{n} est la normale à la surface. Lorsque la surface est mobile, la condition aux limites cinématique est l'égalité entre la vitesse normale du fluide et celle de la surface libre. Cette condition résulte de la continuité du champ de vitesse (la démonstration de ce résultat sort du cadre de cet exposé).

On cherche donc à définir et exprimer la vitesse d'une surface libre (ou au moins sa vitesse normale). On suppose que l'équation de la surface libre s'écrit $F(x, z, t) = 0$ et que le fluide étudié est situé du côté $F(x, z, t) \leq 0$ de cette surface. Dans le cas général, cette équation implicite permet d'associer plusieurs valeurs d'élévation z à une même valeur de x , comme, par exemple, dans le cas du déferlement d'une vague. Dans le cas où la surface libre n'est pas trop déformée, à une valeur de x correspond une seule valeur de z , ce qui permet d'écrire l'équation de la surface libre sous la forme $F(x, z, t) = z - h(x, t) = 0$.

Étant donnée la fonction dérivable $F(x, z, t)$, nous voulons définir la vitesse de la surface libre d'équation $F(x, z, t) = 0$. Considérons une particule fictive $\tilde{\underline{x}}(t)$ appartenant à cette surface pour tout temps t . Comme $F[\tilde{\underline{x}}(t), \tilde{z}(t), t] = 0$ pour tout t , on a

$$\frac{d}{dt} \{F[\tilde{\underline{x}}(t), \tilde{z}(t), t]\} = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \tilde{\underline{U}}(t) \cdot \underline{\text{grad}} F \right] (\tilde{x}, \tilde{z}, t) = 0 \quad (3)$$

où $\tilde{\underline{U}} = \frac{d}{dt} \tilde{\underline{x}}(t)$ est la vitesse de la particule fictive. Réciproquement, tout particule fictive dont la vitesse $\tilde{\underline{U}}(t)$ vérifie $\frac{\partial F}{\partial t} + \tilde{\underline{U}} \cdot \underline{\text{grad}} F = 0$ appartient à la surface libre pour tout temps si elle y appartient à un instant donné (il suffit d'intégrer $\frac{dF}{dt} = 0$).

Comme $\underline{\text{grad}} F$ est un vecteur normal à la surface libre d'équation $F = 0$, le vecteur normal orienté vers l'extérieur $F > 0$ est $\underline{n} = \underline{\text{grad}} F / \|\underline{\text{grad}} F\|$. On peut alors définir la vitesse normale $\underline{W} = W \underline{n}$ de cette surface comme étant la projection du vecteur $\tilde{\underline{U}}$ sur \underline{n} , ce qui conduit à $W = \tilde{\underline{U}} \cdot \underline{n} = -\frac{\partial F}{\partial t} / \|\underline{\text{grad}} F\|$. Cette définition est unique dans la mesure où la vitesse normale de toutes les particules fictives conduisent au même résultat.

La condition aux limites cinématique, qui spécifie l'égalité de la vitesse normale du fluide et de la vitesse de la surface libre, s'écrit donc $\underline{U} \cdot \underline{n} = W$ sur la surface libre, c'est-à-dire, compte tenu de $\underline{U} \cdot \underline{n} = \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} F / \|\underline{\text{grad}} F\|$ et $W = -\frac{\partial F}{\partial t} / \|\underline{\text{grad}} F\|$:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} F = 0 \quad \text{pour} \quad F(x, z, t) = 0. \quad (4)$$

On déduit de cette condition qu'une particule fluide non fictive appartenant à la surface à un instant donné y reste pour toujours. Cette propriété résulte donc de la condition $\underline{U} \cdot \underline{n} = W$ qui résulte elle-même de la continuité du champ de vitesse.

1.3 Conditions aux limites de l'écoulement

Les conditions aux limites au fond s'écrivent $\underline{U}(x, 0, t) = \underline{0}$, c'est-à-dire

$$u = w = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0. \quad (5)$$

Notons qu'en l'absence de viscosité (les équations de Navier-Stokes s'appellent "équations d'Euler" pour $\nu_n = 0$), ces deux conditions doivent être remplacées par la seule conditions aux limites cinématique $w = 0$.

On suppose que l'équation de la surface libre est de la forme $F(x, z, t) = z - h(x, t) = 0$, ce qui exclut des déformations trop importantes comme, par

exemple, dans le cas d'un déferlement. La condition aux limites cinématique s'écrit donc $\frac{dF}{dt} = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w \quad \text{pour} \quad z = h(x, t). \quad (6)$$

La condition aux limites dynamique sur la surface libre exprime la continuité des forces de surface. On suppose que le fluide est en contact avec un fluide parfait dont la pression p_a peut être considérée comme constante (par exemple la pression atmosphérique à la surface de l'eau). La condition aux limites dynamique s'écrit donc

$$\underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{n}} = -p_a \underline{\underline{n}} \quad \text{pour} \quad z = h(x, t) \quad (7)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}(x, z, t)$ est le tenseur des contraintes qui s'écrit

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2 \rho_0 \nu_n \underline{\underline{D}},$$

$$\text{où} \quad \underline{\underline{D}}(x, z, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (8)$$

est le tenseur des taux de déformation. La normale $\underline{\underline{n}} = \underline{\text{grad}} F / \|\underline{\text{grad}} F\|$ à la surface est proportionnelle au vecteur $\underline{\text{grad}} F = -\frac{\partial h}{\partial x} \underline{\underline{e}}_x + \underline{\underline{e}}_z$.

1.4 Viscosité turbulente

Pour mettre en évidence la nécessité d'introduire la notion de viscosité turbulente pour décrire des écoulements à surface libre réalistes, étudions les solutions stationnaires du présent modèle basé sur une viscosité moléculaire ν_n qui vaut $\nu_n \sim 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ dans l'eau.

On montre facilement que les solutions stationnaires sont de la forme $u(x, z, t) = U(z)$, $w = 0$ et $h(x, t) = h_n$, où le profil $U(z)$ est solution de l'équation

$$0 = g \sin \alpha + \nu_n U''(z) \quad (9)$$

avec les conditions aux limites $U(0) = 0$ et $U'(h_n) = 0$. Cette équation exprime l'équilibre entre la force de gravité et les forces visqueuses. On en déduit l'expression :

$$U(z) = -\frac{g \sin \alpha}{2 \nu_n} z (z - 2 h_n). \quad (10)$$

La vitesse maximale est alors $U(h_n) = \frac{g \sin \alpha}{2 \nu_n} h_n^2$. Pour $h_n = 10 \text{ cm}$, et une pente de 1 % ($\text{tg } \alpha \sim \alpha \sim 10^{-2}$), on obtient $U(h_n) \sim 500 \text{ m/s}$.

Cette valeur de vitesse est beaucoup plus grande que les vitesses observées en laboratoire ou dans la nature. L'explication de cette différence est la suivante : au-delà d'une certaine vitesse, l'écoulement devient turbulent. Les écoulements stationnaires sont toujours des solutions mathématiques du modèle, mais elles ne peuvent pas être observées car très instables. Elles sont remplacées par des écoulements instationnaires exhibant des tourbillons de tailles très diverses. On parle d'écoulement turbulent. La modélisation des écoulements turbulents est l'un des sujets scientifiques les plus difficiles, à ce jour non résolu.

Ici, nous nous contenterons de la modélisation turbulente la plus simple qui consiste à remplacer, dans les équations du modèle, la viscosité moléculaire ν_n par un viscosité effective constante

$$\nu_e = \nu_n + \nu_t \quad (11)$$

qui est la somme de la viscosité moléculaire et d'une viscosité turbulente constante ν_t beaucoup plus grande que ν_n et censée représenter l'effet des petits tourbillons sur l'écoulement moyen. Les champs \underline{U} et p , solutions de ces nouvelles équations, doivent donc être considérés comme décrivant des champs moyens, les fluctuations de vitesses ou de pression étant prises en compte dans le terme de viscosité turbulente.

2 Approximations de milieu peu profond

Pour pouvoir négliger certains termes dans un système d'équations et obtenir ainsi un nouveau modèle valide dans le cadre d'une approximation, il est nécessaire d'identifier les nombres sans dimensions qui contrôlent le problème et de comparer leurs tailles respectives. L'adimensionnalisation des équations de Navier-Stokes incompressibles conduit à quatre nombres sans dimensions. On étudie alors plusieurs approximations de milieu peu profond conduisant à des modèles différents.

2.1 Adimensionnalisation des équations de Navier-Stokes

Le modèle d'écoulement étudié est constitué des équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \alpha + \nu_e \Delta u \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g \cos \alpha + \nu_e \Delta w \end{aligned} \quad (12)$$

où ν_e est une viscosité effective constante, des conditions aux limites au fond

$$u = w = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0 \quad (13)$$

ainsi que des conditions aux limites de surface libre

$$\begin{pmatrix} -(p - p_a) + 2\rho_0\nu_e \frac{\partial u}{\partial x} & \rho_0\nu_e \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \rho_0\nu_e \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & -(p - p_a) + 2\rho_0\nu_e \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

et $\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w$ pour $z = h(x, t)$. (14)

On choisit d'adimensionnaliser ce modèle avec le système d'unités suivant :

$$\begin{aligned} x &= L_0 x^*, & z &= h_0 z^*, & t &= \frac{L_0}{U_0} t^*, \\ u &= U_0 u^*, & w &= U_0 \frac{h_0}{L_0} w^* & \text{et} & p = \rho_0 U_0^2 p^* \end{aligned} \quad (15)$$

où L_0 est une échelle de longueur horizontale, h_0 est une échelle de longueur verticale et U_0 une échelle de vitesse longitudinale. Les échelles de temps L/U_0 , de vitesse verticale $U_0 h_0/L_0$ et de pression $\rho_0 U_0^2$ sont construites à partir des échelles précédentes. Les champs adimensionnés dépendent des variables dimensionnelles à travers des relations du type $u(x, z, t) = U_0 u^*(x^*, z^*, t^*)$. Un calcul simple permet d'obtenir le modèle ainsi adimensionné qui s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} &= 0 \\ \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\text{tg } \alpha}{\epsilon F_r^2} + \frac{1}{\epsilon R_e} \Delta^* u^* \\ \epsilon^2 \left(\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) &= -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} - \frac{1}{F_r^2} + \frac{\epsilon}{R_e} \Delta^* w^* \\ \text{avec} \quad \Delta^* &= \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} \end{aligned} \quad (16)$$

et où les quatre nombres sans dimension intervenant dans ces équations sont

$$\epsilon = \frac{h_0}{L_0}, \quad F_r = \frac{U_0}{\sqrt{g \cos \alpha h_0}}, \quad R_e = \frac{h_0 U_0}{\nu_e} \quad \text{et} \quad \text{tg } \alpha. \quad (17)$$

Le nombre de Froude F_r est le rapport entre la vitesse caractéristique U_0 de l'écoulement et une vitesse $\sqrt{g' h_0}$ avec $g' = g \cos \alpha$ qui se trouve être la vitesse de propagation des ondes de surface en milieu peu profond (admis ici). Le nombre de Reynolds effectif R_e est basé sur la viscosité turbulente effective. Il est plus petit que le nombre de Reynolds moléculaire $R_n = h_0 U_0/\nu_n$.

Les conditions aux limites adimensionnées au fond s'écrivent

$$u^* = w^* = 0 \quad \text{pour} \quad z^* = 0 \quad (18)$$

et les conditions aux limites adimensionnées sur la surface libre s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_e} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \epsilon (p^* - p_a^*) \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \frac{\epsilon^2}{R_e} \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*} - 2 \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \right) &= 0 \\ -(p^* - p_a^*) + \frac{\epsilon^2}{R_e} \left(-\frac{\partial u^*}{\partial z^*} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + 2 \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) - \frac{\epsilon^3}{R_e} \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} &= 0 \\ \text{et} \quad \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} &= w^* \quad \text{pour} \quad z^* = h^*(x^*, t^*). \end{aligned} \quad (19)$$

2.2 Passage à la limite des milieux peu profonds

Dans tout ce qui suit nous considérons que le milieu est peu profond, ce qui se traduit par $\epsilon \ll 1$ (très petit devant 1). On supposera toujours que $F_r = O(1)$, mais les nombres sans dimension $\frac{1}{R_e}$ et $\text{tg } \alpha$ pourront être $O(1)$ (d'ordre 0 en ϵ), $O(\epsilon)$ (d'ordre 1 en ϵ) ou très petits devant 1. On suppose que tous les champs ou variables adimensionnés sont d'ordre 1. Dans tous ces cas, l'hypothèse $\epsilon \ll 1$ permet de réduire le modèles aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} &= 0 \\ \epsilon \left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) &= -\epsilon \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\text{tg } \alpha}{F_r^2} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \\ 0 &= -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} - \frac{1}{F_r^2} \end{aligned} \quad (20)$$

et les conditions aux limites adimensionnées sur la surface libre s'écrivent

$$\frac{\partial u^*}{\partial z^*} = 0, \quad p^* = p_a^* \quad \text{et} \quad \begin{aligned} u^* = w^* = 0 & \quad \text{pour} \quad z^* = 0 \\ \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} = w^* & \quad \text{pour} \quad z^* = h^*(x^*, t^*). \end{aligned} \quad (21)$$

2.3 Classification des approximations

Les ordres de grandeur des nombres sans dimension $\frac{1}{R_e}$ et $\text{tg } \alpha$ déterminent les termes supplémentaires que l'on peut ou ne peut pas négliger. On peut alors revenir aux équations avec dimensions après avoir identifié les termes que l'on peut négliger. Les conditions aux limites, par exemple, s'écrivent toujours

$$u = w = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad p = p_a \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w \quad \text{pour} \quad z = h(x, t) \quad (22)$$

dans la mesure où $\epsilon \ll 1$, c'est-à-dire dans l'approximation de milieu peu profond. D'autre part, la pression vérifie toujours

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g', \quad (23)$$

avec $g' = g \cos \alpha$. En utilisant la conditions aux limites

$$p = p_a \quad \text{pour} \quad z = h(x, t), \quad (24)$$

on déduit l'expression de la pression qui s'écrit :

$$p(x, z, t) = p_a - \rho_0 g' [z - h(x, t)]. \quad (25)$$

On remplacera désormais p par sa valeur en fonction de h dans les équations.

Le tableau (0.1) recense les cas pour lesquels les équations ne conduisent pas à des solutions triviales.

$\frac{1}{Re} = O(1)$			Ondes de crues
$\frac{1}{Re} = O(\epsilon)$	Saint-Venant pente nulle	Équations de Saint-Venant cas général	
$\frac{1}{Re} \ll \epsilon$	Saint-Venant pente et frottement nuls	Saint-Venant frottement nul	
	$\text{tg } \alpha \ll \epsilon$	$\text{tg } \alpha = O(\epsilon)$	$\text{tg } \alpha = O(1)$

Table 1: Approximations dans le cas $\epsilon \ll 1$ et $F_r = O(1)$

Dans le cas $\frac{1}{Re} = O(1)$ et $\text{tg } \alpha = O(1)$, on obtient "l'approximation des ondes de crues" qui consiste à ne garder que les termes

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ 0 &= g \sin \alpha + \nu_e \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Dans le cas $\frac{1}{Re} = O(\epsilon)$ et $\text{tg } \alpha = O(\epsilon)$ on obtient "l'approximation des équations de Saint-Venant" qui consiste à ne garder que les termes

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g \sin \alpha + \nu_e \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Dans le cas $\frac{1}{Re} \ll \epsilon$ et $\text{tg } \alpha \ll \epsilon$ on obtient “l’approximation pente et frottement nuls” qui consiste à ne garder que les termes

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -g' \frac{\partial h}{\partial x}. \end{aligned} \quad (27)$$

Notons que pour les cas $\text{tg } \alpha \ll \epsilon$, on peut remplacer $g' = g \cos \alpha$ par g et $\sin \alpha$ par α dans les équations. On a conservé ici les notations g' et $\sin \alpha$ pour pouvoir comparer plus facilement les différentes approximations entre elles.

3 Modèles 1D intégrés sur la verticale

Les différents modèles obtenus dans le cadre des approximations de milieu peu profond sont ici intégrés sur la verticale. On obtient alors des modèles unidimensionnels à condition de paramétriser certains termes comme l’écart-type des fluctuations de vitesse ou encore le cisaillement au fond de l’écoulement. On obtient alors les équations de Saint-Venant et ses variantes (ondes de crues, pente ou frottement nuls).

3.1 Utilisation de la formule de Leibnitz

Pour intégrer sur la couche fluide les systèmes d’équations des diverses approximations, on peut se concentrer dans un premier temps sur l’approximation des équations de Saint-Venant qui s’écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g \sin \alpha + \nu_e \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (28)$$

avec les conditions aux limites

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad p = p_a \quad \text{et} \quad \begin{aligned} u = w = 0 & \quad \text{pour } z = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w & \quad \text{pour } z = h(x, t) \end{aligned} \quad . \quad (29)$$

On définit la vitesse longitudinale moyenne $U(x, t)$ de la couche fluide par la relation

$$U(x, t) = \frac{1}{h(x, t)} \int_0^{h(x, t)} u(x, z, t) dz. \quad (30)$$

Pour intégrer de 0 à $h(x, t)$ les équations du modèle, il sera nécessaire d'utiliser la formule de Leibnitz

$$\frac{d}{ds} \int_{a(s)}^{b(s)} f(s, z) dz = \int_{a(s)}^{b(s)} \frac{\partial f}{\partial s}(s, z) dz + \frac{db}{ds}(s) f[s, b(s)] - \frac{da}{ds}(s) f[s, a(s)]$$

valable pour toute fonction $f(s, z)$ intégrable et dérivable et tout intervalle $[a(s), b(s)]$ dont les bornes varient avec s .

3.2 Équation de conservation de la masse

L'intégration sur la verticale de l'équation de conservation de la masse conduit à

$$\int_0^{h(x,t)} \frac{\partial u}{\partial x}(x, z, t) dz + \int_0^{h(x,t)} \frac{\partial w}{\partial z}(x, z, t) dz = 0. \quad (31)$$

En appliquant la formule de Leibnitz et en intégrant $\frac{\partial w}{\partial z}$, on en déduit

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(x,t)} u(x, z, t) dz - u[x, h(x, t), t] \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) + w[x, h(x, t), t] - w(x, 0, t) = 0.$$

Les conditions aux limites $w = 0$ pour $z = 0$ et $\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w$ pour $z = h(x, t)$ conduisent alors, en utilisant la définition de $U(x, t)$, à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x} [h(x, t) U(x, t)] + \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = 0. \quad (32)$$

L'équation de conservation de la masse intégrée sur la couche s'écrit donc

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (33)$$

3.3 Équation de conservation de la quantité de mouvement

En utilisant la relation $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} u = \text{div} (\underline{U} u)$ dans l'équation de la quantité de mouvement, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u u)}{\partial x} + \frac{\partial (w u)}{\partial z} = -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g \sin \alpha + \nu_e \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (34)$$

En utilisant la formule de Leibnitz, on obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u dz - \frac{\partial h}{\partial t} u|_{z=h} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 dz - \frac{\partial h}{\partial x} u^2|_{z=h} + \left[w u \right]_{z=0}^{z=h} = \\ -g' h \frac{\partial h}{\partial x} + g \sin \alpha h + \nu_e \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z=0}^{z=h}. \end{aligned} \quad (35)$$

En utilisant les conditions aux limites et la définition de U , on obtient

$$\frac{\partial(U h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 dz + g' h \frac{\partial h}{\partial x} = gh \sin \alpha - \frac{\tau_f}{\rho_0} \quad (36)$$

où $\tau_f(x, t) = \rho_0 \nu_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0, t)$ est la contrainte de cisaillement au fond.

3.4 Paramétrisations supplémentaires

On cherche à obtenir un modèle qui ne fasse intervenir que les champs $U(x, t)$ et $h(x, t)$. Il faut pour cela exprimer $\int_0^h u^2 dz$ et τ_f en fonction de ces champs. On dit que l'on "paramétrise" ces deux termes. Il s'agit d'une démarche de modélisation qui repose sur des observations expérimentales et non pas sur une déduction exacte issue des équations de Navier-Stokes avec viscosité turbulente. En fait, tout modèle résulte d'une succession de paramétrisations de phénomènes physiques.

En notant $u(x, z, t) = U(x, t) + \hat{u}(x, z, t)$ on a

$$\int_0^h u^2 dz = U^2 h + \int_0^h \hat{u}^2 dz . \quad (37)$$

Une première paramétrisation consiste à écrire que le second terme est proportionnel au premier, c'est-à-dire

$$\int_0^h \hat{u}^2 dz = \beta U^2 h . \quad (38)$$

En milieu peu profond, on peut souvent négliger ce terme en posant $\beta = 0$. C'est ce que nous supposons ici.

Pour la paramétrisation du cisaillement au fond τ_f , on définit la grandeur sans dimension $C_f(h, U)$ par la relation

$$\tau_f = \frac{1}{2} C_f(h, U) \rho_0 U |U| \quad (39)$$

Une première paramétrisation consiste à considérer que C_f est constant. Une paramétrisation plus complexe consiste à utiliser la corrélation semi-empirique de Colebrook qui propose une paramétrisation $C_f(h, U)$ en résolvant l'équation implicite

$$\sqrt{\frac{1}{C_f(h, U)}} = 3,48 - 4 \log_{10} \left(\frac{z_0}{2h} + \frac{9,35 \nu_n}{4hU \sqrt{C_f(h, U)}} \right) \quad (40)$$

où ν_n est la viscosité *moléculaire* (et non pas turbulente), z_0 est la rugosité du fond, c'est-à-dire la taille moyenne des aspérités de la paroi.

Enfin, une paramétrisation très souvent utilisée est la paramétrisation de Manning-Strickler (MS) que les hydrauliciens écrivent sous la forme

$$C_f(h) = \frac{2g}{K^2 h^{1/3}} \quad (41)$$

où K est le “nombre de Strickler” (avec dimension !) que nous choisissons ici d’écrire sous la forme :

$$C_f(h) = \Phi_{MS} \left(\frac{z_0}{h} \right)^{1/3} \quad (42)$$

où z_0 est la rugosité du fond et Φ_{MS} un nombre sans dimension qui peut être choisi de l’ordre de $\Phi_{MS} = 0,1$ (à partir de la relation de Meyer-Peter).

3.5 Équations de Saint-Venant

On a donc construit le modèle 1D des équations de Saint-Venant qui s’écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} &= g \sin \alpha - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h} \end{aligned} \quad (43)$$

où $C_f(h, U)$ est un coefficient de frottement constant ou dépendant des variables U et h à travers une paramétrisation particulière. Ce modèle repose sur les hypothèses $\frac{1}{Re} \sim \text{tg } \alpha \sim \epsilon \ll 1$ avec $F_r = O(1)$. La pression $p(x, z, t)$ est connue pour ce modèle (pression hydrostatique) et n’intervient pas explicitement dans les équations. Le cas $\text{tg } \alpha \ll \epsilon$ est obtenu simplement en posant $\alpha = 0$ (pente nulle), tandis que le cas $\frac{1}{Re} \ll \epsilon$ est obtenu en posant $C_f = 0$ (frottement nul). L’approximation “pente et frottement nul” est obtenue en posant à la fois $\alpha = 0$ et $C_f = 0$.

L’approximation des ondes de crues, correspondant au cas $\frac{1}{Re} = O(1)$ et $\text{tg } \alpha = O(1)$, s’obtient facilement en reprenant les calculs effectués pour l’approximation des équations de Saint Venant. On obtient alors le système

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \\ 0 &= g h \sin \alpha - \frac{C_f}{2} U|U|. \end{aligned} \quad (44)$$

On peut ainsi éliminer U des équations pour obtenir une équation d’advection non linéaire pour h de la forme

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (45)$$

où l’expression de la fonction $c(h)$ dépend du choix de la paramétrisation du coefficient de frottement $C_f(h, U)$.

Conclusion

On a donc détaillé la dérivation des équations de Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes incompressibles à surface libre.

Les équations de Saint-Venant contiennent tous les termes permettant d'obtenir les différents cas limites qui ont été identifiés (voir Tableau):

- Équations de Saint-Venant complètes : cette approximation correspond au cas $\epsilon \rightarrow 0$, $\frac{1}{Re} = O(\epsilon)$ et $\text{tg } \alpha = O(\epsilon)$.
- Ondes de crues : cette approximation correspond au cas $\epsilon \rightarrow 0$, $\frac{1}{Re} = O(1)$ et $\text{tg } \alpha = O(1)$. Pour obtenir le modèle correspondant, il suffit de négliger, dans les équations de quantité de mouvement, le terme d'accélération.
- Pente ou frottement nuls : ces approximation correspondent aux cas $\epsilon \rightarrow 0$, $\frac{1}{Re} \ll \epsilon$ ou $\text{tg } \alpha \ll \epsilon$. Pour obtenir le modèle correspondant, il suffit de négliger, dans les équations de mouvement, les termes $g \sin \alpha$ ou les termes de frottement ($C_f = 0$).

On s'est placé dans le cas simple d'un écoulement bidimensionnel dans un plan vertical. On généralise facilement cette dérivation aux cas des écoulements 3D qui conduisent au système des équations de Saint-Venant 2D :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial y} + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) &= 0 \\
 \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g' \frac{\partial h}{\partial x} &= g \sin \alpha - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h} \\
 \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g' \frac{\partial h}{\partial y} &= -\frac{C_f}{2} \frac{V|V|}{h}
 \end{aligned} \tag{46}$$

On peut aussi considérer le cas d'un fond de forme générale et d'équation $z = Z_f(x)$, à condition que son échelle de variation reste petite devant l'épaisseur de la couche. Dans ce cas, on définit la pente du fond par $\text{tg } \alpha = Z'_f(x)$ avec $\alpha(x)$ variable. On note maintenant $z = \eta(x, t)$ l'équation de la surface libre et $h(x, t) = \eta(x, t) - Z_f(x)$ l'épaisseur de la couche fluide. Les équations de Saint-Venant 1D s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial \eta}{\partial x} &= g \sin \alpha - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h}
 \end{aligned} \tag{47}$$

La dernière généralisation considérée ici est celle d'un cours d'eau dont le section $A(\eta)$ et le périmètre mouillé $P(\eta)$ dépendent de la côte de la surface libre η . On montre dans ce cas que les équations de Saint-Venant s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + U \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial \eta}{\partial x} &= g \sin \alpha - \frac{C_f}{2} \frac{U|U| P}{A}. \end{aligned} \quad (48)$$

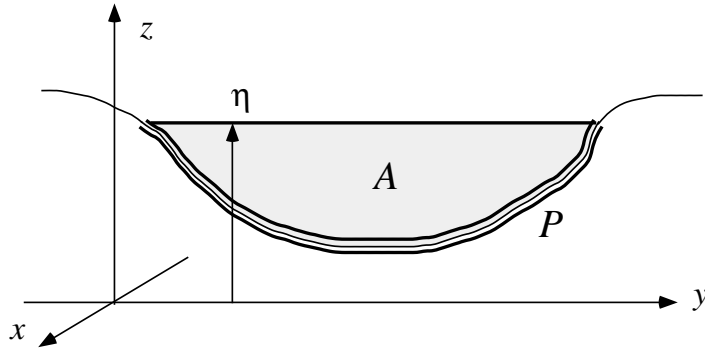


Figure 3: Section $A(\eta)$ et périmètre mouillé $P(\eta)$ dépendant de la côte de la surface libre η .