EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 0.1 Intégration sur la hauteur

On considère le modèle d'écoulement à surface libre régi par les équations suivantes, écrites en variables dimensionnées :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \qquad 0=\nu_e\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+g\,\sin\alpha, \qquad 0=-\frac{1}{\rho_0}\,\frac{\partial p}{\partial z}-g\,\cos\alpha$$

avec les conditions aux limites $u(x,0,t)=w(x,0,t)=0$ au fond du canal et les relations $\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}=w$, $p=p_a$ et $\frac{\partial u}{\partial z}=0$ sur la surface libre d'équation $z=h(x,t)$.

1) Indiquer brièvement les approximations qui conduisent à ce modèle.
2) Montrer que si la hauteur ne dépend pas du temps, il en va de même pour le champ de vitesse et de pression.
3) En revenant au cas général instationnaire, exprimer le champ de pression $p(x,z,t)$ en fonction de $h(x,t)$ et de z.

On définit la vitesse moyenne d'une section du canal par

$$U(x,t)=\frac{1}{h(x,t)}\int_0^{h(x,t)} u(x,z,t)\;dz\;. \qquad (1)$$

4) Intégrer l'équation de conservation de la masse sur la verticale pour en déduire une équation ne faisant intervenir que $U(x,t)$ et $h(x,t)$.
5) Intégrer l'équation de conservation de la quantité de mouvement sur la verticale et en déduire une équation ne faisant intervenir que $h(x,t)$ et la grandeur $\tau_f(x,t)=\rho_0\,\nu_e\,\frac{\partial u}{\partial z}(x,0,t)$.
6) Indiquer la dimension de τ_f et indiquer brièvement son interprétation physique.
7) On suppose que l'on modélise τ_f par la paramétrisation $\tau_f=\frac{1}{2}C_f\rho_0 U|U|$ avec C_f constant. Écrire la forme particulière (approximation des ondes de crues) des équations de Saint-Venant ainsi obtenues.

Corrigé page **??**

EXERCICE 0.2 Analyse dimensionnelle et τ_f

On considère les équations de Saint-Venant écrites sous la forme

$$\frac{\partial h}{\partial t}+U\,\frac{\partial h}{\partial x}+h\,\frac{\partial U}{\partial x}\;=\;0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\,\frac{\partial U}{\partial x} + g'\,\frac{\partial h}{\partial x} \quad = \quad g\,\sin\alpha - \frac{\tau_f}{\rho_0\,h}\,. \qquad (2)$$

Dans tout ce qui suit, on suppose que U est positif. On cherche ici à déterminer plusieurs expressions possibles de τ_f à partir d'analyses dimensionnelles. On notera Φ les fonctions inconnues, sans dimensions et dépendant des nombres sans dimensions qui interviendront dans ces expresssions.

1) Rappeler les définitions des grandeurs h, U, α, g, g', ρ_0 et τ_f intervenant dans les équations puis indiquer leurs dimensions.
2) On suppose que $\tau_f(\rho_0, U)$ dépend uniquement de ρ_0 et de U. En déduire l'expression de τ_f en fonction de ρ_0, U et une constante arbitraire sans dimension que l'on notera Φ.
3) On suppose que $\tau_f(\rho_0, U, h)$ dépend de ρ_0, U et h. En déduire l'expression de τ_f. Comparer avec le résultat de la question précédente.
4) On définit le coefficient de frottement C_f par la relation

$$\tau_f = \frac{1}{2}\,C_f\,\rho_0\,U^2\,. \qquad (3)$$

   On suppose que $C_f(\rho_0, U, h)$ ne dépend que de ρ_0, U et h. En déduire l'expression de C_f en notant Φ une constante arbitraire sans dimension.
5) On note z_0 la rugosité du fond du canal et ν_e la viscosité effective du fluide. On suppose que $C_f(\rho_0, U, h, z_0, \nu_n)$ ne dépend que de ρ_0, U, h, z_0 et de la viscosité moléculaire ν_n. En déduire que C_f ne dépend que des nombres sans dimensions $R_u = z_0/h$ et $R_n = U\;h/\nu_n$.
6) À quelle analyse dimensionnelle la corrélation semi-empirique de Colebrook correspond-elle ?
7) Proposer un argument physique justifiant que C_f ne dépend ni de g ni de α.
8) On suppose qu'à l'équilibre la loi de Manning-Strickler $U = K\,\sqrt{\sin\alpha}\,h^{\frac{2}{3}}$ est vérifiée où K, appelé "nombre de Strickler", est supposé indépendant de α, h, U et ν_e. En supposant que $C_f(\rho_0, U, h, z_0, \nu_e)$ est indépendant de g et α (question précédente) et que h et U sont les valeurs de l'écoulement à l'équilibre (solution homogène et stationnaire) donner son expression en fonction de h, z_0 et d'une constante arbitraire que l'on noter Φ_{MS}.
9) En déduire l'expression de K en fonction de g, z_0 et de Φ_{MS}. Quelle est l'unité du "nombre" de Strickler K ? Conclure en indiquant qu'une valeur numérique du nombre de Strickler correspond en fait à une valeur numérique de la rugosité dans un champ de gravité donné alors que Φ_{MS} est une constante universelle.

Corrigé page **??**

EXERCICE 0.3 Ondes de crues linéaires et non linéaires

On considère le modèle d'écoulement à surface libre régi par les équations suivantes, écrites en variables dimensionnées :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial\,(U\,h)}{\partial x} = 0, \qquad 0 = g\sin\alpha - \frac{C_f}{2}\frac{U|U|}{h}$$

où $h(x,t)$ est la hauteur de la surface libre et $U(x,t)$ est la vitesse moyenne dans la direction de la pente.

1) Indiquer brièvement les approximations qui conduisent à ce modèle.
2) On cherche des écoulements constants en temps et en espace solutions de ces équations. Écrire la relation que doivent vérifier la hauteur h_n et la vitesse U_n de ces écoulements.

Ondes de crues linéaires

On suppose que (h_n, U_n) est un écoulement constant solution du modèle. On note $h = h_n + \widetilde{h}$ et $U = U_n + \widetilde{U}$ les solutions du modèle et on s'intéresse au cas $\widetilde{h} \ll h_n$ et $\widetilde{U} \ll U_n$.

3) Écrire les équations linéarisées qui régissent l'évolution de $\widetilde{h}$ et $\widetilde{U}$ en supposant $U_n > 0$.
4) En déduire que l'on peut éliminer $\widetilde{U}$ pour ne conserver qu'une équation en $\widetilde{h}$ que l'on écrira.
5) On considère la condition initiale $h(x,0) = h_n + \widetilde{h}_1\,[1 - \tanh(k\,x)]$ (forme arbitraire). Montrer que l'on doit choisir la condition initiale en vitesse sous la forme $U(x,0) = \kappa\ h_n^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\ \kappa\ h_n^{-\frac{1}{2}}\,\widetilde{h}_1\,[1 - \tanh(k\,x)]$ avec $\kappa = \sqrt{\frac{2g\sin\alpha}{C_f}}$. Écrire la solution $h(x,t) = h_n + \widetilde{h}_1(x,t)$ issue de ces conditions initiales.
6) On suppose que $h_n = 1$ m, $\kappa = 1$ m$^{\frac{1}{2}}$ s^{-1}, $h_1' = 1$ cm et $k = 10^{-1}$ km^{-1}. Tracer sommairement l'évolution spatio-temporelle de cette petite crue en indiquant son extension spatiale.

Ondes de crues non linéaires

On considère maintenant la version non linéaire du modèle précédent et l'on suppose que la vitesse moyenne $U(x,t)$ reste toujours positive.

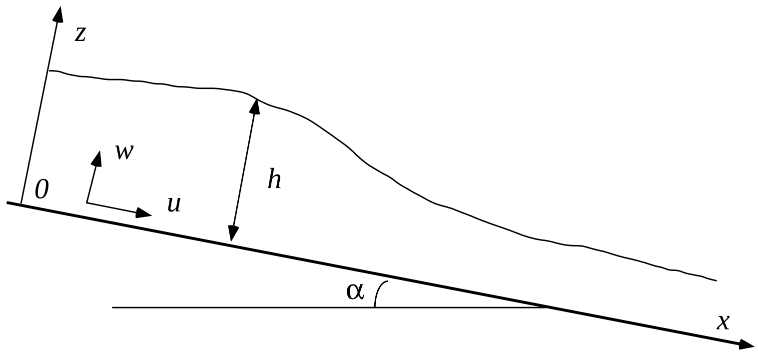
7) Montrer que l'on peut éliminer U pour ne conserver qu'une équation en h que l'on écrira.
8) En invoquant les lois de conservation de la mécanique dont découle le modèle, écrire la formulation intégrale de la loi de conservation de la

grandeur $\int_a^b h(x,t)dx$ où $[a,b]$ est un intervalle fixe quelconque pris sur l'axe des x.

Corrigé page **??**

PROBLÈME 0.4 Approximation des ondes de crues

On s'intéresse à la dynamique d'un écoulement à surface libre dans un canal 1D dont le fond est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.



Équations de Navier-Stokes 2D

On suppose que l'écoulement à surface libre est régi par les équations de Navier-Stokes turbulentes 2D

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu_e\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + g\ \sin\alpha \tag{5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu_e\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) - g\ \cos\alpha \tag{6}$$

avec les conditions aux limites $u(x,0,t) = w(x,0,t) = 0$ au fond du canal et les relations $\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} = w$ et $\underline{\underline{\sigma}}_e\ \underline{n} = -p_a\,\underline{n}$ sur la surface libre d'équation $z = h(x,t)$ et de normale $\underline{n}$. Dans ces équations, les composantes x et z sont respectivement parallèle et perpendiculaire au fond du canal, u et w étant les composantes de la vitesse correspondantes. On désigne par ρ_0 la masse volumique du fluide et p sa pression. On a noté g la gravité et p_a la pression atmosphérique supposée constante. La grandeur $\nu_e = \nu_n + \nu_t$, supposée constante, est la viscosité effective somme de la viscosité moléculaire ν_n et de la viscosité turbulente ν_t. On modélise les forces de contact à l'aide du tenseur des contraintes effectives $\underline{\underline{\sigma}}_e = -p\,\underline{\underline{I}} + 2\,\nu_e\,\rho_0\,\underline{\underline{D}}$ où $\underline{\underline{D}}$ est le tenseur des taux de déformations (partie symétrique du gradient du champ de vitesse).

1) Comment varie la masse volumique pour cette modélisation ?
2) Expliquer très brièvement la notion de viscosité turbulente.
3) Indiquer très brièvement la signification physique ou géométrique de chacune des conditions aux limites.
4) Écrire le nouveau jeu de conditions aux limites que l'on doit écrire dans le cas $\nu_e = 0$.

Modèle asymptotique

On suppose $\nu_e \neq 0$ et que la masse volumique ρ_0 est constante (écoulement incompressible). On choisit d'adimensionner les équations de Navier-Stokes ci-dessus en posant $x = L\, x^*$, $z = h_0\, z^*$, $t = \frac{L}{U_0}\, t^*$, $u = U_0\, u^*$, $w = U_0 \frac{h_0}{L}\, w^*$ et $p = \rho_0\, U_0^2\, p^*$ où h_0, L et U_0 sont respectivement les hauteur, longueur et vitesse horizontale caractéristiques des écoulements auxquels on s'intéresse. On note $\epsilon = h_0/L$ le rapport entre profondeur et échelle de longueur horizontale, $R_e = U_0 h_0/\nu_e$ le nombre de Reynolds effectif basé sur la viscosité effective et $F_r = U_0/\sqrt{g'\, h_0}$ le nombre de Froude en posant $g' = g\, \cos\alpha$.

5) Écrire les équations de Navier-Stokes sous forme adimensionnée à l'aide des variables x^*, z^*, u^*, w^* et p^* en faisant apparaître les quatre nombres sans dimension $(\epsilon, R_e, F_r, \mathrm{tg}\,\alpha)$.
6) Procéder de même pour les conditions aux limites en notant $h = h_0\, h^*$.
7) On s'intéresse à une crue d'extension $L = 10$ km dans une rivière de pente $\mathrm{tg}\,\alpha = .01$ et de profondeur $h_0 = 1$ m, qui est parcourue par un écoulement de vitesse $U_0 = 1$ m/s. On suppose que la turbulence est modélisée par la viscosité effective constant $\nu_e = 10^{-2}$ m^2/s. Montrer que ces valeurs sont compatibles avec le chemin asymptotique $\epsilon = \gamma^2$, $R_e = R/\gamma$, F_r constant et $\mathrm{tg}\,\alpha = T\gamma$ avec $\gamma \ll 1$ un petit paramètre et R et T des constantes.
8) On suppose que les grandeurs adimensionnées h^*, u^*, w^* et p^* ne s'annulent pas lorsque γ tend vers zéro. Écrire les équations de Navier-Stokes 2D dans limite $\gamma \to 0$ de ce chemin asymptotique.
9) Procéder de même avec les conditions aux limites.
10) Récapituler les équations du modèle asymptotique obtenu et ses conditions aux limites en revenant aux grandeurs dimensionnées. Interpréter brièvement cette approximation en language physique.

Corrigé page **??**