CORRIGÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

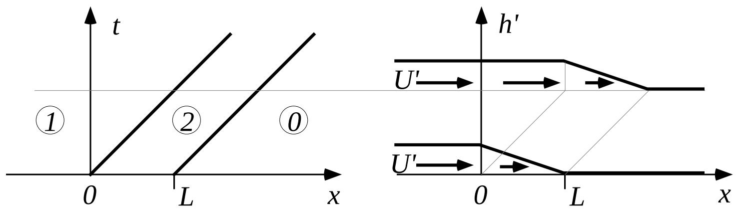
Corrigé 0.2 Propagation d'un petit hydrogramme

1)Les équations de Saint Venant s'écrivent ici $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U\,h) = 0$ ainsi que $\frac{\partial U}{\partial t} + U\,\frac{\partial U}{\partial x} + g\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0$. **2)**Les équations linéarisées autour de (h_0, U_0) s'écrivent $\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t} + U_0\,\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x} + h_0\,\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial x} = 0$ ainsi que $\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t} + U_0\,\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial x} + g\,\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x} = 0$. **3)**Les caracatéristiques $\mathcal{C}_\pm$ sont respectivement les droites d'équations $x = a + (U_0 \pm c_0)t$ avec $c_0 = \sqrt{g\,h_0}$. Les invariants de Riemmann sont les quantités $J_\pm = \widetilde{U} \pm \chi\,\widetilde{h}$ avec $\chi = \sqrt{\frac{g}{h_0}}$. Comme J_- est nul sur le demi-axe Ox, il l'est dans tout le quart de plan $(x \geq 0, t \geq 0)$ dans le cas torrentiel (les $\mathcal{C}_-$ remontent le courant). **4)**Sur le segment de droite $x = 0$, $\tau \in [0, t_*]$, on peut donc écrire $J_- = \widetilde{U}(0,\tau) - \chi\,\widetilde{h}_0(\tau) = 0$, d'où $\widetilde{U}(0,\tau) = \chi\,\widetilde{h}_0(\tau) = \chi\,\widetilde{h}_*\,\tau/t_*$. De même sur la demi-droite $x = 0$, $\tau \geq t_*$, on a $\widetilde{U}(0,\tau) = \chi\,\widetilde{h}_*$. **5)**Puisque J_+ est constant le long des $\mathcal{C}_+$, on peut écrire $J_+ = \widetilde{U}(x,t) + \chi\,\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{U}(x,\tau) + \chi\,\widetilde{h}(x,\tau)$ avec $\tau = t - \frac{x}{U_0 + c_0}$. Comme $J_- = 0$ partout, on a $J_- = \widetilde{U}(x,t) - \chi\,\widetilde{h}(x,t) = 0$. On en déduit $\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_0\left(t - \frac{x}{U_0+c_0}\right) = \widetilde{h}_*\,\left(t - \frac{x}{U_0+c_0}\right)/t_*$ et $\widetilde{U}(x,t) = \chi\,\widetilde{h}(x,t)$ pour $\frac{x}{U_0+c_0} \leq t \leq \frac{x}{U_0+c_0} + t_*$. **6)**Pour $t \geq t_*$, on a $h = h_0 + \widetilde{h}_*$ pour $0 \leq x \leq (U_0 + c_0)(t - t_*)$, $h = h_0$ pour $(U_0 + c_0)t \leq x$ avec une pente rectiligne reliant les deux valeurs. **7)**Dans le cas torrentiel, il faut imposer une condition sur la vitesse en $x = 0$ en plus de la condition sur la hauteur.

Corrigé 0.1 Intumescences linéaires

1)Les équations linéarisées autour de l'état de base $(h, U) = (h_0, 0)$ s'écrivent $\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t} + h_0\,\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t} + g\,\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x} = 0$. **2)**Les caractéristiques sont des droites d'équations $x = a_1 + c_0\,t$ pour les C_1 et $x = a_2 - c_0\,t$ pour les C_2 avec $c_0 = \sqrt{g\,h_0}$. Les invariants de Riemann sont $J_1(\widetilde{U}, \widetilde{h}) = \widetilde{U} + \chi\,\widetilde{h}$ et $J_2(\widetilde{U}, \widetilde{h}) = \widetilde{U} - \chi\,\widetilde{h}$ avec $\chi = \sqrt{\frac{g}{h_0}}$. **3)**En reportant les expressions proposées dans les équations, on obtient $-c_0\,\frac{d\widetilde{h}_0}{dx} + h_0\,\frac{d\widetilde{U}_0}{dx} = (-c_0 + \mu c_0)\,\frac{d\widetilde{h}_0}{dx} = 0$ et $-c_0\,\frac{d\widetilde{U}_0}{dx} + g\,\frac{d\widetilde{h}_0}{dx} = g(-\mu + 1)\,\frac{d\widetilde{h}_0}{dx} = 0$. Ces fonctions sont solutions si $\mu = 1$. Elles vérifient trivialement les conditions initiales pour $t = 0$. **4)**Les invariants de Riemann sont $J_1 = \widetilde{U}(x,t) + \chi\,\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{U}_0(a_1) + \chi\,\widetilde{h}_0(a_1)$ le long des C_1 et $J_2 = \widetilde{U}(x,t) - \chi\,\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{U}_0(a_2) - \chi\,\widetilde{h}_0(a_2)$ le long des C_2 avec $\chi = \sqrt{\frac{g}{h_0}}$. Pour $\mu = 1$, on a $J_2 = 0$ sur toutes les C_2. On peut donc écrire le système $\widetilde{U} + \chi\,\widetilde{h} = \widetilde{U}_0(a_1) + \chi\,\widetilde{h}_0(a_1)$ et $\widetilde{U} - \chi\,\widetilde{h} = \widetilde{U}_0(a_1) - \chi\,\widetilde{h}_0(a_1)$ car $\widetilde{U}_0(a_2) - \chi\,\widetilde{h}_0(a_2) = \widetilde{U}_0(a_1) - \chi\,\widetilde{h}_0(a_1) = 0$. On en déduit $\widetilde{U}(x,t) = \widetilde{U}_0(a_1) = \widetilde{U}_0(x - c_0\,t)$ et $\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_0(a_1) = \widetilde{h}_0(x - c_0\,t)$. La solution est donc

$\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_m$ et $\widetilde{U}(x,t) = \chi\ \widetilde{h}_m$ pour $x \leq c_0\ t$, $\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_m\,(1 - \frac{x-c_0\ t}{L})$ et $\widetilde{U}(x,t) = \chi\ \widetilde{h}_m\,(1 - \frac{x-c_0\ t}{L})$ pour $x \in [0,L]$, $\widetilde{h}(x,t) = 0$ et $\widetilde{U}(x,t) = 0$ pour $x \geq L + c_0\ t$. La solution est donc une onde simple qui se déplace vers la droite. Les profils initiaux de hauteur de surface libre et de vitesse se propagent sans déformation à la vitesse c_0.



5)Les caractéristiques sont les mêmes que pour la question précédente. Pour $\mu = -1$, on a $J_1 = 0$ sur toutes les C_1. On a donc $\widetilde{U}(x,t) = \widetilde{U}_0(x + c_0\ t)$ et $\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_0(x + c_0\ t)$. La solution est donc une onde simple se déplaçant vers la gauche.