

COURS ÉCRIT

1	Classifications des systèmes linéaires 1D	2
2	Ondes de surface linéaires et hyperboliques	14
3	Ondes de surface linéaires et dispersives	21

Introduction

Il suffit de jeter un caillou dans l'eau ou de faire couler de l'eau dans un canal pour observer des ondes de surface. Ces ondes sont dues à l'action de la gravité qui tend à rappeler, vers l'horizontale, la surface libre qui délimite un fluide lourd, par exemple un liquide, d'un fluide léger, par exemple un gaz. Pour modéliser ces ondes, on peut considérer que le fluide est incompressible. L'observation suggère que les ondes de surface, du moins à une échelle suffisamment grande, ont une durée de vie importante. On peut donc négliger les phénomènes de viscosité et considérer que le fluide est parfait. Le mouvement se laisse alors décrire par les équations d'Euler incompressibles, la difficulté principale résidant dans l'existence d'une surface libre. Lorsque la profondeur est faible devant l'extension horizontale du mouvement, un développement asymptotique permet d'éliminer la direction verticale et de remplacer les équations d'Euler par les équations de Saint Venant. Nous admettrons ici ce résultat en postulant la forme de ce système d'équations.

Pour simplifier, on se limite aux phénomènes ne faisant intervenir qu'une seule direction horizontale. On s'intéresse donc aux équations d'Euler bidimensionnelle (2D) à surface libre dans le cas général et aux équations de Saint Venant unidimensionnelles (1D) dans le cas peu profond pour lequel la direction verticale est éliminée. On supposera aussi que le fond est horizontal.

On s'intéresse ici au cas où ces ondes peuvent être considérées comme des petits mouvements, ce qui peut être quantifié en comparant la hauteur des "vagues" à la profondeur ou à leur extension horizontale. Dans ce cas, un

développement asymptotique, basé sur cette hypothèse, permet de remplacer les équations non linéaires du modèle par des équations linéaires. Comme on s'intéresse à des perturbations autour d'écoulements de base stationnaires en temps et homogènes en espace, on obtient des systèmes linéaires à coefficients constants.

Ceci justifie que l'on présente deux classifications des équations aux dérivées partielles 1D et linéaires à coefficients constants, en insistant sur les classes auxquelles appartiennent les ondes de surfaces linéaires. Une première classification consiste à distinguer les systèmes amortis, instable et ondulatoires avec ou sans dispersion. Les ondes de surface appartiennent à cette dernière classe dans la mesure où l'amortissement due à la viscosité est négligé. Elles sont dispersives dans le cas d'une profondeur quelconque et non dispersives dans la limite des faibles profondeurs décrite par les équations de Saint Venant linéaires.

La deuxième classification repose sur l'existence ou non de droites caractéristiques dans l'espace temps. Ces droites propagent l'information contenue dans des fonctions de Riemann ou, mieux, des invariants de Riemann comme dans le cas des équations de Saint Venant linéaires. Le système est hyperbolique lorsqu'il y a autant de familles de caractéristiques que de degrés de libertés. C'est le cas des ondes non dispersives décrites par les équations de Saint Venant linéaires. Les autres cas (paraboliques, elliptiques ou mixtes) sont mentionnés pour mémoire.

On traite ensuite en détail le cas des ondes de surface linéaires hyperboliques (non dispersives) décrites par les équations de Saint Venant 1D linéarisées autour d'un écoulement uniforme, puis le cas des ondes de surface dispersives décrites par les équations d'Euler incompressibles 2D à surface libre linéarisées autour du repos.

1 Classifications des systèmes linéaires 1D

Étant donnée une famille d'équations aux dérivées partielles (EDP), il est intéressant de les classer en sous-familles ayant des propriétés communes. On s'intéresse ici à la famille des EDP linéaires à coefficients constants dont les fonctions inconnues ne dépendent que des deux variables notées t et x . On se concentre particulièrement sur les systèmes qui constituent des modèles physiques où t est la variable de temps et x une variable d'espace. Beaucoup de systèmes physiques instationnaires et unidimensionnels (1D) peuvent se mettre sous cette forme. On ne s'attardera pas sur les systèmes pour lesquels t est en fait une variable d'espace, que l'on notera alors y , et qui ne respectent

pas le principe de causalité.

La première classification consiste à examiner le comportement des modes monochromatiques proportionnels à e^{ikx+st} qui doivent obéir à des relations de dispersion de la forme $s = S(k) = \Sigma(k) - i\Omega(k)$. Le signe de Σ permet de distinguer les systèmes amortis, instables ou ondulatoires. On mettra ici l'accent sur cette dernière classe, pour laquelle on distingue les ondes non dispersives des ondes dispersives selon que la fonction $\Omega(k)$ est affine ou non.

La seconde classification est basée sur l'existence de droites caractéristiques obtenues en essayant de transformer l'EDP en un système d'équations d'advection couplées de la forme $(\partial_t + \lambda_n \partial_x)J_n = L_n(J_1, \dots, J_N)$ pour $n = 1, \dots, N$ où les λ_n sont réels. Les systèmes qui se laissent transformer ainsi sont qualifiés d'hyperboliques. On mettra ici l'accent sur cette classe, les autres cas (paraboliques, elliptiques ou mixtes) étant mentionnés pour mémoire.

1.1 Systèmes 1D du premier ordre

On s'intéresse à tous les systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) qui peuvent se mettre sous la forme "standard"

$$\underline{A} \partial_t \underline{U} + \underline{B} \partial_x \underline{U} = \underline{D} \underline{U} \quad (1)$$

avec $\underline{U}(x, t) \in \mathbb{R}^N$ un champ de vecteur réel à N composantes et \underline{A} , \underline{B} et \underline{D} trois matrices $N \times N$ à coefficients constants. Les notations ∂_t et ∂_x désignent les dérivées partielles par rapport au temps et l'on note $\underline{U} = (U_1, \dots, U_N)$.

Sauf mention contraire, t désigne la variable de temps et x la variable d'espace. On s'intéresse en effet à des systèmes d'EDP modélisant des phénomènes physiques représentés par des profils spatiaux unidimensionnels (1D) évoluant dans le temps. Pour l'instant, on ne précise pas si le domaine spatial est la droite réelle toute entière ou bien un intervalle fixe ou évoluant dans le temps.

Beaucoup de systèmes linéaires utilisés pour modéliser des phénomènes physiques, en particulier issus de la mécanique des fluides, peuvent se mettre sous cette forme. On examine ici plusieurs exemples en indiquant à chaque fois l'expression des matrices \underline{A} , \underline{B} et \underline{D} que l'on résume dans le tableau 1.

L'EDP (équation aux dérivées partielles) 1D (unidimensionnelle) la plus simple est l'"équation d'advection diffusion" linéaire qui s'écrit

$$\partial_t u + c \partial_x u = 0 \quad (2)$$

où c est une constante. Ce modèle répond à la "forme standard" (1) avec $N = 1$. Ses solutions, de la forme $u(x, t) = u_0(x - ct)$, décrivent l'advection sans déformation et à la vitesse c d'un profil initial quelconque $u_0(x)$.

Équation	<u>A</u>	<u>B</u>	<u>D</u>
d'advection (2)	1	c	0
des ondes (3)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -c \\ -c & 0 \end{pmatrix}$	<u>0</u>
de KdV (5)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
de la chaleur (7)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
de Saint Venant (9)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} U_0 & h_0 \\ g & U_0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
de Laplace (10)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
du 2 nd degré $\Delta \geq 0$ (12)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} r_+ & 0 \\ f & ar_- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$

Table 1: Numéro des équations des exemples décrits avec l'expression des matrices de la forme "standard" (1).

L'“équation des ondes 1D”, parfois appelée “équation des cordes vibrantes”, est une EDP du second ordre en espace et en temps qui s'écrit

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0. \quad (3)$$

Cette équation du second ordre est équivalente au système du premier ordre qui s'écrit

$$\partial_t u - c \partial_x v = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t v - c \partial_x u = 0. \quad (4)$$

En posant $\underline{U} = (u, v)$, on voit que l'ajout de la variable v a permis de mettre l'équation des ondes sous la forme standard (1) d'une équation du premier ordre avec $N = 2$. On note que la forme standard n'est pas unique et l'on aurait pu par exemple écrire $\partial_t u - \partial_x v = 0$ et $\partial_t v - c^2 \partial_x u = 0$. Les solutions sont de la forme $u(x, t) = u_g(x + ct) + u_d(x - ct)$, où $u_g(x)$ et $u_d(x)$ sont des profils quelconques respectivement advectés sans déformation vers la gauche et vers la droite.

L'“équation de Korteweg de Vries linéaire” est une EDP du premier ordre en temps et du troisième ordre en espace qui s'écrit

$$\partial_t u + \alpha \partial_x u + \beta \partial_x^3 u = 0 \quad (5)$$

où α et β sont des constantes. Ce système est équivalent au système du premier ordre

$$\partial_t u + \alpha \partial_x u + \beta \partial_x w = 0, \quad \partial_x u = v \quad \text{et} \quad \partial_x v = w \quad (6)$$

qui est bien sous la forme standard (1) avec $N = 3$. Ce système décrit la dispersion des ondes de surface de grande extension horizontale dans un canal. Un profil initial $u_0(x)$, modélisant une élévation localisée de la surface libre (intumescences), est advecté à la vitesse α mais est aussi déformé en raison de la “dispersion des ondes” modélisée par la constante β .

L'équation de la chaleur 1D est une EDP du premier ordre en temps et du deuxième ordre en espace qui s'écrit

$$\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u \quad (7)$$

où κ est une constante positive. Elle se met sous la forme standard en remarquant son équivalence avec le système

$$\partial_t u - \kappa \partial_x v = 0 \quad \text{et} \quad \partial_x u = v. \quad (8)$$

Ce système modélise la diffusion de la chaleur avec le coefficient de diffusivité κ .

Le système des équations de Saint Venant sans frottement et linéaires s'écrit

$$\partial_t \tilde{h} + U_0 \partial_x \tilde{h} + h_0 \partial_x \tilde{U} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t \tilde{U} + g \partial_x \tilde{h} + U_0 \partial_x \tilde{U} = 0. \quad (9)$$

Ce modèle décrit les petites oscillations d'une surface libre animée d'un courant moyen dans le cadre de l'approximation des faibles profondeurs. Les constantes h_0 et U_0 désignent respectivement la profondeur et la vitesse de la couche fluide en l'absence de perturbations. Les champs $\tilde{h}(x, t)$ et $\tilde{U}(x, t)$ désignent respectivement les petites fluctuations d'élévation de la surface libre et de vitesse. La constante g désigne la gravité. Ce système d'équations est naturellement sous la forme standard (1).

L'équation de Laplace s'écrit sous la forme

$$\partial_y^2 u + \partial_x^2 u = 0 \quad (10)$$

où la variable de temps t a été remplacée par une nouvelle variable d'espace y . Cette substitution est motivée par le fait qu'il ne serait pas possible d'imposer une condition initiale à un instant t , sans aussi imposer une condition “finale” à un instant ultérieur. Nous verrons (admettrons) en effet que la nature “elliptique” de cette équation requiert l'imposition de “conditions aux limites” sur la frontière d'un domaine fermé dans l'espace (x, y) . On peut mettre l'équation de Laplace sous la forme standard (1) en écrivant

$$\partial_y u + \partial_x v = 0 \quad \text{et} \quad \partial_y v - \partial_x u = 0. \quad (11)$$

En revanche, il ne semble pas possible de trouver une transformation permettant de mettre l'équation d'Helmoltz $\partial_y^2 u + \partial_x^2 u = \zeta u$ sous la forme standard

(1), sauf à permettre des coefficients complexes pour les matrices \underline{A} et \underline{B} . Cette équation possède les mêmes propriétés que l'équation de Laplace en ce qui concerne la nature elliptique et la nécessité d'imposer des conditions aux limites sur une frontière fermée.

La forme la plus générale des EDP d'ordre deux en espace et en temps s'écrit

$$a \partial_t^2 u + b \partial_{tx} u + c \partial_x^2 u + e \partial_t u + f \partial_x u = d u \quad (12)$$

où (a, b, c, e, f, d) sont des constantes. Pour mettre ces EDP sous la forme standard (1), on peut utiliser la forme canonique des polynômes du second degré pour écrire

$$a \left[\left(\partial_t + \frac{b}{2a} \partial_x \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \partial_x^2 \right] u + e \partial_t u + f \partial_x u = d u \quad (13)$$

Lorsque $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, il n'est souvent pas possible de mettre cette équation sous la forme standard (1). C'est le cas par exemple de l'équation d'Helmoltz que nous avons déjà présentée. Lorsque $\Delta \geq 0$, on peut poser $r_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ et l'EDP se met sous la forme standard

$$(\partial_t - r_+ \partial_x) u = v \quad \text{et} \quad a (\partial_t - r_- \partial_x) v + e \partial_t u + f \partial_x u = d u . \quad (14)$$

Les exemples qui viennent d'être présentés montrent qu'il est souvent possible de mettre une EDP linéaire d'ordre quelconque sous la forme standard (1). Nous pouvons donc présenter plusieurs classifications des EDP linéaires à partir de cette forme générale.

1.2 Classification par les relations de dispersion

Cette première classification consiste à examiner le comportement des modes monochromatiques proportionnels à e^{ikx+st} qui doivent obéir à des relations de dispersion de la forme $s = S(k) = \Sigma(k) - i \Omega(k)$. Le signe de Σ permet de distinguer les systèmes amortis, instables ou ondulatoires.

On considère les systèmes d'EDP 1D du premier ordre à N degrés de liberté et à coefficients constants de la forme

$$\underline{\underline{A}} \partial_t \underline{U} + \underline{\underline{B}} \partial_x \underline{U} = \underline{\underline{D}} \underline{U} . \quad (15)$$

Comme les coefficients sont constants, le système est invariant par les translations d'espace et de temps. On peut donc chercher des solutions de la forme

$$\underline{U}(x, t) = \text{Re} \left[\underline{\phi}(k) e^{ikx+st} \right] \quad (16)$$

où $k \in \mathbb{R}$ est un nombre réel et $s = \sigma - i \omega \in \mathcal{C}$ est un nombre complexe. Le vecteur $\underline{\phi}(k)$ est complexe afin de prendre en compte d'éventuels déphasages dans les oscillations spatio-temporelles des diverses composantes de \underline{U} . Comme l'EDP est linéaire, les parties réelles et imaginaires d'une solution complexe sont aussi des solutions. On recherche en fait ici les solutions complexes d'une EDP linéaire à coefficients réels.

En reportant l'expression de la solution recherchée dans l'équation, on est conduit à la résolution de l'équation

$$\left(s \underline{A} + i k \underline{B} - \underline{D} \right) \underline{\phi}(k) = \underline{0}. \quad (17)$$

Ce système linéaire dont les inconnues sont les composantes de $\underline{\phi}_m$ n'admet de solutions autres que $\underline{\phi}_m = \underline{0}$ que si la relation suivante est vérifiée :

$$\det \left(s \underline{A} + i k \underline{B} - \underline{D} \right) = 0. \quad (18)$$

Pour k donné, on peut donc définir M solutions réelles ou complexes :

$$s = S_n(k) = \Sigma_n(k) - i \Omega_n(k) \quad \text{avec} \quad n = 1, \dots, M \quad (19)$$

solutions de cette équation polynômiale de degré $M \leq N$. Les cas $M < N$ correspondent aux cas où la matrice \underline{A} n'est pas inversible. On obtient des solutions en imposant à $\underline{\phi}(k)$ d'être l'un des M "vecteurs propres à droites" $\underline{\phi}_n(k)$ vérifiant

$$\left[S_n(k) \underline{A} + i k \underline{B} - \underline{D} \right] \underline{\phi}_n(k) = \underline{0}. \quad (20)$$

Les fonctions $s = S_n(k)$ sont appelées les "relations de dispersion généralisées".

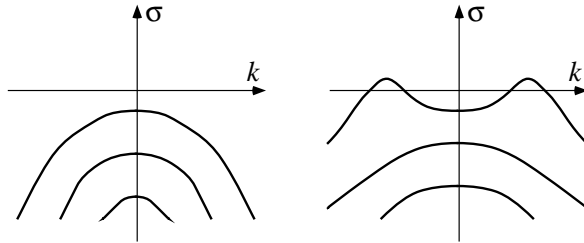


Figure 1: Exemples de parties réelles $\sigma = \Sigma_n(k)$ de la relation de dispersion généralisée. a) Exemple de cas "amorti" b) Exemple de cas "amplifié".

Si le système (17) est diagonalisable pour une valeur particulière de k , il existe N vecteurs propres $\underline{\phi}_n(k)$ et l'on peut construire, grâce à linéarité de l'EDP 1D, l'espace vectoriel (de dimension N) des solutions complexes de la forme

$$\underline{U}(x, t) = \sum_{n=1}^N \hat{A}_n(k) \underline{\phi}_n(k) e^{i k x + S_n(k) t} \quad (21)$$

où $\widehat{A}_n(k)$ sont des amplitudes complexes quelconques.

Si le système (17) est diagonalisable pour tout $k \in \mathbb{R}$, on peut construire l'espace vectoriel des solutions complexes de la forme

$$\underline{U}(x, t) = \sum_{n=1}^N \int_{\mathbb{R}} \widehat{A}_n(k) \underline{\phi}_n(k) e^{i k x + S_n(k) t} dk . \quad (22)$$

L'espace vectoriel des solutions $U(x, t)$ réelles est obtenue en se restreignant aux amplitudes telles que $\widehat{A}_n(-k) = \widehat{A}_n^*(k)$.

On rappelle que la transformée de Fourier permet de décomposer une fonction $A(x)$ en une somme de fonctions sinusoïdales $e^{i k x}$ pour $k \in \mathbb{R}$ sous la forme

$$A(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{A}(k) e^{i k x} dk . \quad (23)$$

La transformée de Fourier $\widehat{A}(k)$ de la fonction $A(x)$ se calcule à l'aide des intégrales

$$\widehat{A}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} A(x) e^{-i k x} dx . \quad (24)$$

Pour $t = 0$, l'équation (22) s'écrit

$$\underline{U}(x, 0) = \sum_{n=1}^N \int_{\mathbb{R}} \widehat{A}_n(k) \underline{\phi}_n(k) e^{i k x} dk \quad (25)$$

On voit alors que les amplitudes $\widehat{A}_n(k)$ résultent d'une décomposition en mode de Fourier des composantes de $\underline{U}(x, 0)$ suivie d'une décomposition sur les N vecteurs propres $\underline{\phi}_n(k)$. Cette décomposition de la condition initiale $\underline{U}(x, 0)$ permet d'obtenir la solution $\underline{U}(x, t)$ pour tout temps à l'aide de l'équation (22).

On dira que le système est "amorti" si pour tout k et tout n la partie réelle $\Sigma_n(k)$ de $S_n(k)$ est strictement négative. En effet, les modules $|\underline{\phi}_n(k)| e^{\Sigma_n(k) t}$ des solutions complexes $\underline{\phi}_n(k) e^{i k x + S_n(k) t}$ décroissent tous avec le temps. Inversement, on dira que le système est "instable" s'il existe au moins un nombre k et un indice n tel que $S_n(k) > 0$.

Lorsque $\Sigma_n(k) = 0$, c'est-à-dire $S_n(k) = -i \Omega_n(k)$, pour tous les nombres k et tous les indices n , le système décrit des "ondes". C'est ce cas que nous développerons en détail par la suite. On dit que les ondes sont "non dispersives" si la dérivée $\Omega'_n(k) = c_n$ est une constante. La fonction $\omega = \Omega_n(k)$ est donc représentée par une droite dans le plan (k, ω) . À l'inverse, les ondes sont "dispersives" lorsque le graphe de cette fonction est courbe.

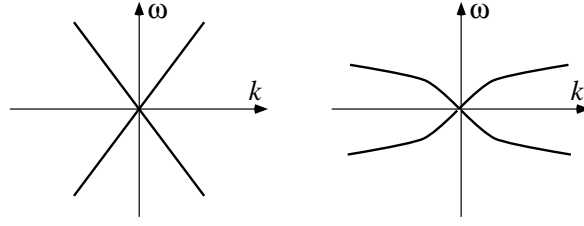


Figure 2: Exemples de relations de dispersion $\omega = \Omega_n(k)$ de la relation de dispersion. a) Exemple d'ondes non dispersives b) Exemple d'ondes dispersives.

Pour certaines équations, comme par exemple l'équation de Laplace, la notion de relation de dispersion généralisée n'a pas de sens. En effet, l'écriture de l'équation de Laplace avec un variable de temps ($\partial_t^2 u + \partial_x^2 u = 0$) conduirait aux relations de dispersion généralisées $\Sigma_1(k) = k$ et $\Sigma_2(k) = -k$. Le fait $\Sigma_1(k)$ soit une fonction croissante de k signifierait que les “petites échelles en espace” (k grand) sont instables (σ positif) ce qui n'a pas de sens physiquement. La classification que nous venons de présenter n'est pertinente que si le problème admet des solutions issues de conditions initiales ou de conditions aux limites respectant la notion de causalité. Dans le cas d'un système “elliptique” (voir définition ci-dessous), il n'est pas pertinent de parler de variable temporelle. On pourra dire alors que le système est “non causal” et que la classification par les relations de dispersion n'est pas pertinente.

1.3 Classification par l'existence de caractéristiques

Cette seconde classification est basée sur l'existence de droites caractéristiques obtenues en essayant de transformer l'EDP en un système d'équations d'advection couplées de la forme $(\partial_t + \lambda_n \partial_x) J_n = L_n(J_1, \dots, J_N)$ pour $n = 1, \dots, N$ où les λ_n sont réels. Les systèmes qui se laissent transformer ainsi sont qualifiés d'hyperboliques.

On considère le système d'EDPs 1D du premier ordre à N degrés de liberté et à coefficients constants de la forme

$$\underline{\underline{A}} \partial_t \underline{U} + \underline{\underline{B}} \partial_x \underline{U} = \underline{\underline{D}} \underline{U} \quad (26)$$

et on suppose que la matrice $\underline{\underline{A}}$ ou la matrice $\underline{\underline{B}}$ est inversible.

Si l'on multiplie cette équation, qui a la forme d'un vecteur colonne, par un vecteur ligne quelconque ψ^T , on obtient une équation scalaire

$$\partial_t (\psi^T \underline{\underline{A}} \underline{U}) + \partial_x (\psi^T \underline{\underline{B}} \underline{U}) = \psi^T \underline{\underline{D}} \underline{U}. \quad (27)$$

Si ψ^T est tel que $\psi^T \underline{\underline{B}} = \lambda \psi^T \underline{\underline{A}}$, cette équation scalaire est de la forme

$$(\partial_t + \lambda \partial_x) (\psi^T \underline{\underline{A}} \underline{\underline{U}}) = \psi^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{U}}. \quad (28)$$

La résolution de cette équation d'advection est un exercice bien connu qui fait intervenir des particules virtuelles se déplaçant à la vitesse λ . Il est donc tentant de chercher tous les vecteurs lignes ψ^T permettant de passer ainsi de l'équation vectorielle de départ à des équations d'advection, l'espoir étant d'en trouver N pour obtenir un système équivalent.

On dit que le système est "hyperbolique" s'il existe N solutions λ_n réelles et N "vecteurs propres à gauche" $\underline{\underline{\psi}}_n$ de directions distinctes vérifiant

$$\underline{\underline{\psi}}_n^T \underline{\underline{B}} = \lambda_n \underline{\underline{\psi}}_n^T \underline{\underline{A}} \quad \text{avec } n = 1, \dots, N, \quad (29)$$

où $\underline{\underline{\psi}}_n^T$ désigne la matrice ligne transposée de la matrice colonne $\underline{\underline{\psi}}_n$. C'est ce cas qui nous développerons en détail par la suite.

Si $\underline{\underline{A}}$ est inversible d'inverse $\underline{\underline{A}}^{-1}$, on peut noter que les vecteurs $\underline{\underline{\psi}}_n$ sont les vecteurs propres à gauche de la matrice $\underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}^{-1}$ dans la mesure où l'on peut écrire

$$\underline{\underline{\psi}}_n^T \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}^{-1} = \lambda_n \underline{\underline{\psi}}_n^T \quad \text{pour } n = 1, \dots, N. \quad (30)$$

On s'intéresse alors aux racines du polynôme en λ suivant :

$$\det (-\lambda \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) = 0. \quad (31)$$

Si $\underline{\underline{B}}$ seule est inversible, on s'intéresse alors aux racines du polynôme en μ qui s'écrit $\det (-\underline{\underline{A}} + \mu \underline{\underline{B}}) = 0$. On ne discutera ici que du cas où $\underline{\underline{A}}$ est inversible dans la mesure où les résultats que nous allons présenter restent valables en échangeant les rôles du temps et de l'espace.

Lorsque qu'il n'existe que M "directions propres" avec $M < N$, on dit que le système est "parabolique". Cette situation se rencontre par exemple lorsque l'une des deux matrices $\underline{\underline{A}}$ ou $\underline{\underline{B}}$ n'est pas inversible ou lorsque l'une des deux matrices n'est pas diagonalisable.

Lorsque toutes les solutions λ_n sont complexes (il faut pour cela que N soit pair), on dit que le système est elliptique. Lorsque qu'une partie des solutions est complexe et une autre réelle, on dira ici que le système est "mixte". Les systèmes elliptiques ou mixtes ne nous intéresseront plus par la suite. Nous admettons ici qu'il nécessitent des conditions aux limites sur une frontière fermée $\partial\mathcal{D}$ de l'espace (x, t) et que la variable t ne peut donc pas être une variable de temps respectant le principe de causalité de la plupart des modèles physiques. Les systèmes elliptiques ou mixtes se rencontrent en physique lorsque t est

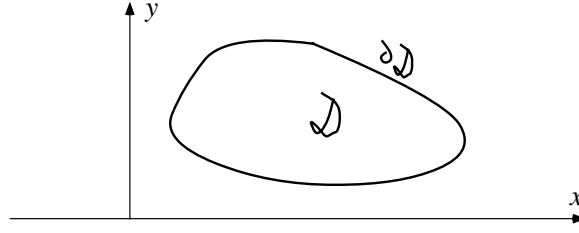


Figure 3: Dans le cas où le système est elliptique, il faut imposer des conditions aux limites sur la frontière fermée $\partial\mathcal{D}$ d'un domaine \mathcal{D} du plan (x, y) .

en fait une variable d'espace que l'on préfère alors noter différemment (par exemple y).

Le cas hyperbolique (N valeurs propres λ_n réelles avec N directions propres à gauche $\underline{\psi}_n$ distinctes) est intéressant grâce au résultat suivant. Étant donnée une solution $\underline{U}(x, t)$, on peut multiplier à gauche l'équation standard (26) par la matrice ligne $\underline{\psi}_n^T$ et en tenant compte de la propriété (29) qui définit le vecteur propre à gauche $\underline{\psi}_n$. En effectuant cette multiplication pour les tous les vecteurs propres à gauche, on obtient les N relations

$$(\partial_t + \lambda_n \partial_x) \underline{\psi}_n^T \underline{A} \underline{U}(x, t) = \underline{\psi}_n^T \underline{D} \underline{U}(x, t) \quad \text{pour } n = 1, \dots, N. \quad (32)$$

On définit alors les N "fonctions de Riemann" par les relations

$$J_n(x, t) = \underline{\psi}_n^T \underline{A} \underline{U}(x, t) \quad \text{pour } n = 1, \dots, N. \quad (33)$$

Comme les N vecteurs propres $\underline{\psi}_n$ forment une base de \mathbb{R}^n et que \underline{A} est inversible, les N fonctions J_n peuvent être vues comme les composantes de \underline{U} dans une nouvelle base. On peut alors écrire

$$\underline{\psi}_n^T \underline{D} \underline{U} = L_n(J_1, \dots, J_N) \quad \text{pour } n = 1, \dots, N \quad (34)$$

où L_n sont N formes linéaires à coefficients constants. Dans le cas hyperbolique, le système d'EDP initial est donc équivalent au système

$$(\partial_t + \lambda_n \partial_x) J_n = L_n(J_1, \dots, J_N) \quad \text{pour } n = 1, \dots, N. \quad (35)$$

On peut interpréter ce système comme N équations d'advection couplées des fonctions de Riemann $J_n(x, t)$ avec les vitesses λ_n . Comme les J_n peuvent être vus comme les N composantes de \underline{U} , il y a bien équivalence entre ce système et le système initial.

Dans le cas particulier $\underline{D} = \underline{0}$, le système s'écrit $(\partial_t + \lambda_n \partial_x) J_n = 0$ pour $n = 1, \dots, N$. Les solutions s'écrivent $J_n(x, t) = J_{n0}(x - \lambda_n t)$ où $J_{n0}(x)$ sont

des fonctions arbitraires. La fonction J_n est donc constante le long des droites d'équations $x = a + \lambda_n t$ où a est une abscisse arbitraire. On dit que les J_n sont les N "invariants de Riemann" du système. Dans le cas général où \underline{D} n'est pas nul, les droites $x = a + \lambda_n t$, appelées "droites caractéristiques", jouent encore un rôle important dans la résolution du système.

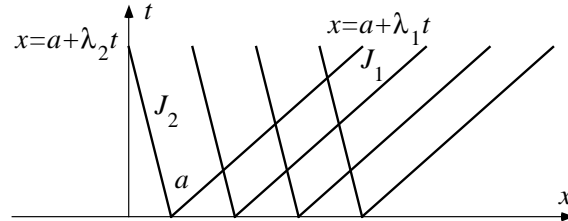


Figure 4: Invariants de Riemann J_n le long des droites C_n caractéristiques C_n d'équation $x = a + \lambda_n t$ dans le plan (x, t) .

1.4 Application des classifications à des exemples

Le tableau 2 indique la position des exemples présentés plus haut pour la classification par la relation de dispersion et la classification par l'existence de droites caractéristiques.

L'équation d'advection $\partial_t u + c \partial_x u = 0$ décrit des ondes non dispersives de relation de dispersion $\Omega(k) = ck$. C'est un système hyperbolique avec $\lambda = c$. L'invariant de Riemann est tout simplement $J = u$.

L'équation des ondes $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$ décrit elle aussi des ondes non dispersives dont les relations de dispersion sont $\Omega_1(k) = -ck$ et $\Omega_2(k) = ck$. C'est un système hyperbolique avec $\lambda_1 = -c$ et $\lambda_2 = c$. En écrivant le système sous la forme $\partial_t u - c \partial_x v = 0$ et $\partial_t v - c \partial_x u = 0$, les invariants de Riemann sont $J_1 = u + v$ et $J_2 = u - v$.

L'équation de Korteweg de Vries linéaire décrit des ondes dispersives dont la relation de dispersion est $\Omega(k) = \alpha k - \beta k^3$. C'est un système parabolique dans la mesure où la matrice $\underline{A}\underline{B}^{-1}$ n'est pas diagonalisable (bloc de Jordan).

L'équation de la chaleur $\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u$ est amortie car sa relation de dispersion généralisée s'écrit $s(k) = -\kappa k^2$. Excepté le nombre d'onde $k = 0$, qui correspond aux solutions constantes, tous les vecteurs d'ondes k correspondent à des modes amortis. Ce système est parabolique dans la mesure où $\underline{A}\underline{B}^{-1}$ n'est pas diagonalisable (bloc de Jordan).

L'exemple de l'équation de Saint Venant sans frottement et linéarisée autour

Équation	Dispersion	Caractéristiques
d'advection (2)	Ondes non dispersives	Hyperbolique
des ondes (3)	Ondes non dispersives	Hyperbolique
de KdV (5)	Ondes dispersives	Parabolique
de la chaleur (7)	Cas amorti	Parabolique
de Saint Venant (9)	Ondes non dispersives	Hyperbolique
de Laplace (10)	(Non causal)	Elliptique
du 2 nd degré $\Delta \geq 0$ (12)	Les quatre cas	Hyperbolique

Table 2: *Classifications par la dispersion et par l'existence de caractéristiques sur des exemples.*

de la solution de base (h_0, U_0) sera développé plus loin. On verra qu'il décrit des ondes non dispersives de relations de dispersion $\Omega_1(k) = (U_0 + \sqrt{gh_0}) k$ et $\Omega_2(k) = (U_0 - \sqrt{gh_0}) k$. On montrera aussi que c'est un système hyperbolique avec $\lambda_1 = U_0 + \sqrt{gh_0}$ et $\lambda_2 = U_0 - \sqrt{gh_0}$ et que les invariants de Riemann sont $J_1 = \tilde{U} + \sqrt{\frac{g}{h_0}} \tilde{h}$ et $J_2 = \tilde{U} - \sqrt{\frac{g}{h_0}} \tilde{h}$.

L'équation de Laplace, comme toutes les EDP du second ordre avec $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ est elliptique. Il n'est donc pas pertinent de classer ces équations avec des relations de dispersion dans la mesure où elles ne respectent pas la causalité. Les équations du second ordre avec $\Delta < 0$ qui ne peuvent pas se mettre sous la forme standard (1) sont aussi qualifiées d'elliptiques avec les mêmes propriétés pour ce qui concerne la nécessité d'imposer des conditions aux limites sur une frontière fermée.

Les EDP du second ordre dans le cas $\Delta \geq 0$ peuvent être amorties, instables ou ondulatoires (avec ou sans dispersion) selon les valeurs des coefficients. Elles sont hyperboliques avec $\lambda_1 = r_+$ et $\lambda_2 = r_-$. En écrivant l'EDP sous la forme $(\partial_t - r_+ \partial_x) u = v$ et $a(\partial_t - r_- \partial_x) v + e \partial_t u + f \partial_x u = d u$, les fonctions de Riemann sont $J_1 = u$ et $J_2 = e u + a v$. Seul J_1 est un invariant de Riemann, donc invariant le long des droites caractéristiques $x = a + r_+ t$. La fonction de Riemann J_2 varie le long des droites caractéristiques $x = a + r_- t$ dans la mesure où elle obéit à l'équation $(\partial_t + r_- \partial_x) J_2 = d u = L_2(J_1, J_2) = d J_1$.

Ces exemples, issus de modèles de la physique, montrent que les deux classi-

fications présentées, l'une à travers les relations de dispersion généralisées l'autre par l'existence de droites caractéristiques, sont relativement indépendantes. Néanmoins, le cas $\underline{D} = \underline{0}$ mérite une attention particulière. Dans ce cas, un système hyperbolique décrit des ondes non dispersives et réciproquement. En effet, on peut écrire $s_n(k) = -i \lambda_n k$ et donc

$$\Omega_n(k) = \lambda_n k \quad \text{pour } n = 1, \dots, N . \quad (36)$$

C'est pourquoi on qualifie souvent d'"ondes hyperboliques" les ondes non dispersives, l'hypothèse $\underline{D} = \underline{0}$ étant alors implicite. C'est ce cas que nous allons développer sur l'exemple des équations de Saint Venant linéaires en l'absence de frottement.

2 Ondes de surface linéaires et hyperboliques

On étudie ici le mouvement d'une couche fluide comprise entre un fond horizontal et une surface libre en contact avec l'atmosphère. On se place dans le cas où le milieu est peu profond par rapport à l'extension horizontale de ce mouvement, ce qui permet de décrire l'écoulement par les équations de Saint Venant. On s'intéresse aux petits mouvements autour d'un écoulement de base caractérisé par une profondeur et une vitesse constante. En effectuant un développement asymptotique basé sur le petit paramètre caractérisant l'amplitude de ces mouvements, on obtient un système d'équations linéaires. On dit que l'on a "linéarisé" les équations de Saint Venant autour d'un état de base. Le système linéaire obtenu est à coefficients constants et se met sous la forme standard que nous avons utilisée pour définir deux classifications. On montre que l'on obtient des ondes non dispersives et hyperboliques. Dans le cas d'un milieu infini dans la direction horizontale, la transformation de Fourier d'une condition initiale permet de décomposer la solution en ondes élémentaires qui se propagent toutes avec la même vitesse, et donc de trouver la solution qui en résulte. La méthode des caractéristiques permet de retrouver le même résultat dans ce cas et s'étend au cas où l'on souhaite imposer des conditions aux limites aux bornes d'un domaine spatiale restreint. La notion de domaine d'influence permet de spécifier le nombre de conditions aux limites conduisant à un problème bien posé.

2.1 Linéarisation des équations de Saint Venant

Les équations de Saint Venant non linéaires 1D décrivent l'évolution d'une couche fluide incompressible et à surface libre dans le cas où sa profondeur est

faible devant l'échelle horizontale de variation du mouvement. En l'absence de frottement, ce modèle s'écrit

$$\partial_t h + \partial_x(h U) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t U + U \partial_x U = -g \partial_x h \quad (37)$$

où g est la gravité, h est la hauteur d'eau et U la vitesse de la couche fluide moyennée sur la verticale.

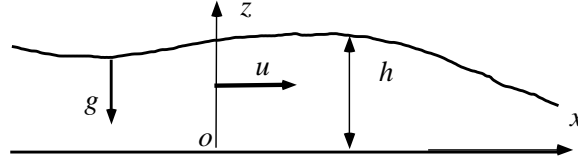


Figure 5: Écoulement à surface libre sur un plan horizontal.

On considère un écoulement stationnaire et uniforme caractérisé par une hauteur d'eau h_0 et une vitesse U_0 constantes. On vérifie facilement que l'état $(h, U) = (h_0, U_0)$ est solution des équations de Saint Venant. On s'intéresse alors aux petits mouvements autour de cette solution de base en notant

$$h = h_0 + \tilde{h} \quad \text{et} \quad U = U_0 + \tilde{U} \quad (38)$$

et en supposant \tilde{h}/h_0 et \tilde{U}/U_0 ou $\tilde{U}/\sqrt{g h_0}$ (dans le cas $U_0 = 0$) sont de l'ordre de $\epsilon \ll 1$. En reportant cette décomposition dans les équations de Saint Venant on obtient le système

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{h} + U_0 \partial_x \tilde{h} + h_0 \partial_x \tilde{U} &= -\partial_x(\tilde{h} \tilde{U}) \\ \partial_t \tilde{U} + g \partial_x \tilde{h} + U_0 \partial_x \tilde{U} &= -\tilde{U} \partial_x \tilde{U} \end{cases} \quad (39)$$

Les termes des membres de gauche de ces égalités sont tous d'ordre ϵ . Les termes des membres de droites sont d'ordre ϵ^2 . On peut donc les négliger en se basant sur l'hypothèse $\epsilon \ll 1$. On obtient donc le système

$$\partial_t \tilde{h} + U_0 \partial_x \tilde{h} + h_0 \partial_x \tilde{U} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t \tilde{U} + g \partial_x \tilde{h} + U_0 \partial_x \tilde{U} = 0. \quad (40)$$

Ce système est linéaire. On dit que l'on a "linéarisé" les équations en considérant les petits mouvements autour de l'état de base (h_0, U_0) . Signalons enfin que ce système linéaire s'écrit sous la forme

$$\underline{\underline{A}} \partial_t \underline{U} + \underline{\underline{B}} \partial_x \underline{U} = \partial_t \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{U} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_0 & h_0 \\ g & U_0 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

où $\underline{U} = \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{U} \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}$ est la matrice identité et $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} U_0 & h_0 \\ g & U_0 \end{pmatrix}$. Comme indiqué plus haut, ces équations décrivent des ondes non-dispersives et sont hyperboliques.

2.2 Ondes de surface dans un canal infini et peu profond

Les équations de Saint Venant linéaires 1D (41) sont invariantes par translations d'espace et de temps. Si le domaine spatial est la droite réelle tout entière, le problème à résoudre est, lui aussi, invariant par les translations d'espace et de temps. On peut donc chercher solutions complexes sous la forme $\tilde{\underline{U}}(x, t) = \tilde{\underline{U}}_m e^{i k x + s t}$ c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{h}_m \\ \tilde{U}_m \end{pmatrix} e^{i k x + s t}. \quad (42)$$

Les composantes \tilde{h}_m et \tilde{U}_m du vecteur $\tilde{\underline{U}}_m$ sont des amplitudes complexes. On obtient des solutions à condition de satisfaire $s \tilde{\underline{U}}_m + i k \underline{B} \tilde{\underline{U}}_m = 0$ ou encore $\underline{B} \tilde{\underline{U}}_m = \lambda \tilde{\underline{U}}_m$ avec $\lambda = -\frac{s}{i k}$. La recherche des valeurs propres λ et vecteurs propres à droite $\underline{\phi}$ de \underline{B} , qui s'écrit $\underline{B} \underline{\phi} = \lambda \underline{\phi}$, conduit à

$$\lambda_1 = U_0 + c_0, \quad \underline{\phi}_1 = \begin{pmatrix} 1/\chi \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = U_0 - c_0, \quad \underline{\phi}_2 = \begin{pmatrix} -1/\chi \\ 1 \end{pmatrix} \quad (43)$$

où l'on a noté $c_0 = \sqrt{g h_0}$ et $\chi = \sqrt{\frac{g}{h_0}}$. Les relations de dispersion des équations de Saint Venant linéaires sont donc de la forme $s_n(k) = -i \Omega(k)$ avec

$$\omega = \Omega_1(k) = \lambda_1 k \quad \text{et} \quad \omega = \Omega_2(k) = \lambda_2 k. \quad (44)$$

Pour un k donné, on a donc obtenu des solutions de la forme

$$\tilde{\underline{U}}(x, t) = \hat{A}_1(k) \underline{\phi}_1 e^{i k (x - \lambda_1 t)} \quad \text{ou} \quad \tilde{\underline{U}}(x, t) = \hat{A}_2(k) \underline{\phi}_2 e^{i k (x - \lambda_2 t)} \quad (45)$$

où $\hat{A}_1(k)$ et $\hat{A}_2(k)$ sont des amplitudes complexes arbitraires. On est en présence d'ondes monochromatiques dont les vitesses de phase sont $\lambda_1 = U_0 + c_0$ ou $\lambda_2 = U_0 - c_0$. Ce système décrit donc bien des ondes non dispersives

Comme le système est linéaire, toute combinaison linéaire de ces solutions de base est une solution. Comme les coefficients du système sont réels, le complexe conjugué d'une solution est aussi solution. La partie réelle d'une solution est donc aussi solution. Les solutions réelles sont ici déterminées entre prenant la partie réelle des solutions complexes.

Grâce a ces solutions de base, on peut résoudre facilement le problème aux conditions initiales qui consiste à chercher la solution issue de la conditions initiale $\tilde{\underline{U}}(x, 0) = \tilde{\underline{U}}_0(x)$. Pour cela, on décompose le vecteur $\tilde{\underline{U}}_0(x)$ sur la base $(\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2)$, ce qui s'écrit

$$\tilde{\underline{U}}_0(x) = \begin{pmatrix} \tilde{h}_0(x) \\ \tilde{U}_0(x) \end{pmatrix} = A_1(x) \underline{\phi}_1 + A_2(x) \underline{\phi}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\chi} [A_1(x) - A_2(x)] \\ A_1(x) + A_2(x) \end{pmatrix}. \quad (46)$$

On a donc $A_1 = \frac{1}{2} \left(\tilde{U}_0 + \frac{1}{\chi} \tilde{h}_0 \right)$ et $A_2 = \frac{1}{2} \left(\tilde{U}_0 - \frac{1}{\chi} \tilde{h}_0 \right)$.

En calculant les transformées de Fourier $\hat{A}_1(k)$ et $\hat{A}_2(k)$ des fonctions $A_1(x)$ et $A_2(x)$ on peut écrire :

$$\underline{\tilde{U}}_0(x) = \left[\int_{\mathbb{R}} \hat{A}_1(k) e^{i k x} dk \right] \underline{\phi}_1 + \left[\int_{\mathbb{R}} \hat{A}_2(k) e^{i k x} dk \right] \underline{\phi}_2 . \quad (47)$$

En calculant les transformées de Fourier $\hat{A}_1(k)$ et $\hat{A}_2(k)$ des fonctions $A_1(x)$ et $A_2(x)$ On peut alors fabriquer la solution des équations de Saint Venant suivante :

$$\underline{\tilde{U}}(x, t) = \left[\int_{\mathbb{R}} \hat{A}_1(k) e^{i k(x-\lambda_1 t)} dk \right] \underline{\phi}_1 + \left[\int_{\mathbb{R}} \hat{A}_2(k) e^{i k(x-\lambda_2 t)} dk \right] \underline{\phi}_2 . \quad (48)$$

On remarque ici que l'expression générale (22) :

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^N \int_{\mathbb{R}} \hat{A}_n(k) \underline{\phi}_n(k) e^{i k x + S_n(k) t} dk \quad (49)$$

s'écrit ici

$$\underline{\tilde{U}}(x, t) = \left[\int_{\mathbb{R}} \hat{A}_1(k) e^{i k(x-\lambda_1 t)} dk \right] \underline{\phi}_1 + \left[\int_{\mathbb{R}} \hat{A}_2(k) e^{i k(x-\lambda_2 t)} dk \right] \underline{\phi}_2 . \quad (50)$$

dans la mesure où $\underline{\phi}_1$ et $\underline{\phi}_2$ sont les mêmes pour tous les nombres d'onde k .

Le champ de vecteur $\underline{\tilde{U}}(x, t)$ est bien la superposition d'ondes monochromatiques vérifiant l'une des relations de dispersion. Il vérifie d'autre part la condition initiale $\underline{\tilde{U}}(x, 0) = \underline{\tilde{U}}_0(x)$. On remarque d'autre part que cette solution s'écrit sous la forme

$$\underline{\tilde{U}}(x, t) = A_1(x - \lambda_1 t) \underline{\phi}_1 + A_2(x - \lambda_2 t) \underline{\phi}_2 . \quad (51)$$

La condition initiale $\underline{\tilde{U}}_0(x)$ a donc donnée naissance à deux solutions qui se déplacent sans déformation avec, respectivement, les vitesses λ_1 et λ_2 .

On appelle "nombre de Froude" de l'écoulement moyen le nombre sans dimension $F_r = |U_0|/\sqrt{g h_0} = |U_0|/c_0$. Lorsque $F_r < 1$, les vitesses $\lambda_1 = U_0 + c_0$ et $\lambda_2 = U_0 - c_0$ sont de signes opposés. L'information issue, par exemple, d'une condition initiale quelconque, remonte donc vers la droite et vers la gauche. On dit que le régime de l'écoulement moyen (h_0, U_0) est "sous-critique" ou encore "fluvial". Le régime "supercritique", ou encore "torrentiel", est obtenu pour $F_r > 1$. Dans ce cas, l'information se propage dans une seule direction, vers la droite si $U_0 > 0$.

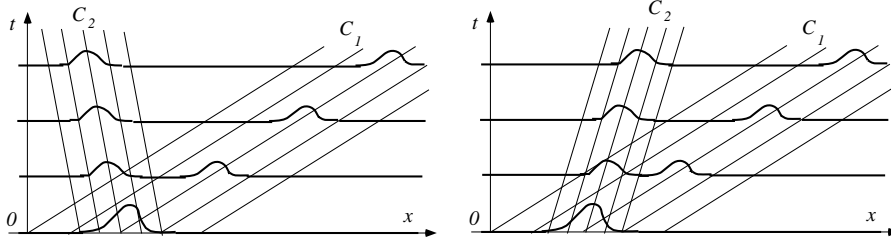


Figure 6: Solution $\tilde{U}(x, t) = A_1(x - \lambda_1 t) + A_2(x - \lambda_2 t)$ issue d'une condition initiale $\tilde{U}_0(x)$. a) Cas sous-critique $F_r < 1$ (fluvial), b) cas super-critique $F_r > 1$ (torrentiel).

2.3 Droites caractéristiques et invariants de Riemann

En multipliant les équations de Saint Venant linéaires 1D (41) à gauche par le vecteur ligne $\underline{\psi}_1^T = (\sqrt{g/h_0}, 1) = (\chi, 1)$, on obtient le système

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{g}{h_0}} \partial_t \tilde{h} + \partial_t \tilde{U} + \left(U_0 \sqrt{\frac{g}{h_0}} + g \right) \partial_x \tilde{h} + \left(h_0 \sqrt{\frac{g}{h_0}} + U_0 \right) \partial_x \tilde{U} = \\ \partial_t \left(\tilde{U} + \sqrt{\frac{g}{h_0}} \tilde{h} \right) + \left(U_0 + \sqrt{g h_0} \right) \partial_x \left(\tilde{U} + \sqrt{\frac{g}{h_0}} \tilde{h} \right) = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

De manière parallèle, pour multiplier les équations de Saint Venant par le vecteur ligne $\underline{\psi}_2^T = (-\sqrt{g/h_0}, 1) = (-\chi, 1)$ il suffit de changer le signe devant chacun des symboles $\sqrt{\quad}$. On a donc mis le système sous la forme

$$\begin{aligned} \partial_t J_1 + \lambda_1 \partial_x J_1 = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t J_2 + \lambda_2 \partial_x J_2 = 0 \\ \text{avec } (J_1, J_2) = \left(\tilde{U} + \chi \tilde{h}, \quad \tilde{U} - \chi \tilde{h} \right) \quad \text{et} \quad (\lambda_1, \lambda_2) = (U_0 + c_0, U_0 - c_0). \end{aligned}$$

Le choix de $\underline{\psi}_1^T$ et $\underline{\psi}_2^T$ ne relève pas de la chance mais du fait que le système au valeur propre $\underline{\psi}^T \underline{B} = \lambda \underline{\psi}^T$ des équations de Saint Venant linéaire 1D, écrites sous la forme $\partial_t \underline{U} + \underline{B} \partial_x \underline{U} = \underline{0}$, possède deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 associées aux deux vecteurs propres à gauche $\underline{\psi}_1^T$ et $\underline{\psi}_2^T$.

On dit que $J_1(x, t)$ et $J_2(x, t)$ sont des “invariants de Riemann”. Ces fonctions sont en effet constantes le long des droites caractéristiques \mathcal{C}_1 d'équations $x = a + \lambda_1 t$ et \mathcal{C}_2 d'équation $x = a + \lambda_2 t$ respectivement, a étant une abscisse arbitraire. On peut remarquer que $\underline{\psi}_1$ et $\underline{\psi}_2$ sont les vecteurs propres à gauche de la matrice \underline{B} associé respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2 .

Dans le cas où le domaine spatial est la droite réelle et où l'on spécifie une condition initiale \tilde{U}_0 , on peut écrire

$$J_1(x, t) = J_{10}(x - \lambda_1 t) \quad \text{et} \quad J_2(x, t) = J_{20}(x - \lambda_2 t)$$

$$\text{avec } J_{10}(x) = \tilde{U}_0(x) + \chi \tilde{h}_0(x) \quad \text{et} \quad J_{20}(x) = \tilde{U}_0(x) - \chi \tilde{h}_0(x). \quad (53)$$

On en déduit que la solution s'écrit

$$\tilde{U}(x, t) = \frac{1}{2} J_{10}(x - \lambda_1 t) \begin{pmatrix} 1/\chi \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} J_{20}(x - \lambda_2 t) \begin{pmatrix} -1/\chi \\ 1 \end{pmatrix} \quad (54)$$

On retrouve l'expression (51) en remarquant que l'on a bien $A_1 = \frac{1}{2} J_{10}$ et $A_2 = \frac{1}{2} J_{20}$ et en reconnaissant les expressions des vecteurs $\underline{\phi}_1$ et $\underline{\phi}_2$ qui sont les vecteurs propres à droite de la matrice \underline{B} .

Contrairement à la méthode par transformée de Fourier, valable seulement dans le cas où le domaine spatial est la droite réelle tout entière, la méthode des caractéristiques s'applique aussi lorsque le domaine spatial est un intervalle, fixe ou variable. Cette méthode permet, de plus, de déterminer le nombre de conditions aux limites que l'on est en droit de spécifier aux bornes du domaine.

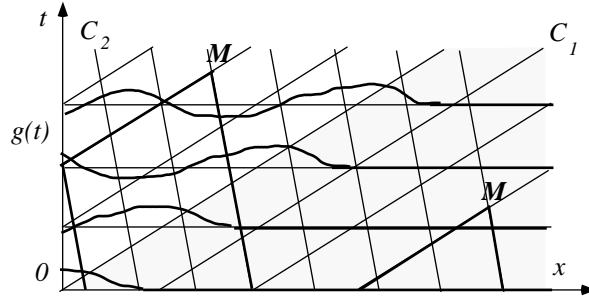


Figure 7: Solution issue des conditions initiales $\tilde{h}_0(x)$ et $\tilde{U}_0(x)$ et la condition aux limites $\tilde{h}(0, t) = g(t)$.

Prenons par exemple de cas du domaine $x \in \mathbb{R}^+$ dans le cas sous-critique $F_r < 1$. On suppose que $U_0 > 0$ et l'on a donc $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Nous allons montrer que pour ce cas, le problème est bien posé en se donnant des conditions initiales $\tilde{h}(x, t) = \tilde{h}_0(x)$ et $\tilde{U}(x, t) = \tilde{U}_0(x)$ pour $x \geq 0$ et une seule condition aux limites $\tilde{h}(0, t) = \tilde{h}_e(t)$. Ce problème correspond à l'écoulement dans un canal situé à droite d'une écluse dont le fonctionnement induit une hauteur $h_0 + \tilde{h}_e(t)$.

On peut tout d'abord résoudre dans la région du plan (x, t) définie par $t \geq 0$ et $x \geq \lambda_1 t$ en écrivant

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x, t) &= \frac{\tilde{U}_0(x - \lambda_1 t) + \tilde{U}_0(x - \lambda_2 t)}{2} + \chi \frac{\tilde{h}_0(x - \lambda_1 t) - \tilde{h}_0(x - \lambda_2 t)}{2} \\ \tilde{h}(x, t) &= \frac{\tilde{h}_0(x - \lambda_1 t) + \tilde{h}_0(x - \lambda_2 t)}{2} + \frac{1}{\chi} \frac{\tilde{U}_0(x - \lambda_1 t) - \tilde{U}_0(x - \lambda_2 t)}{2}. \end{aligned}$$

En $x = 0$ (position de l'écluse) et pour tout temps, on peut écrire $J_2(0, t) = J_2(-\lambda_2 t, 0)$ c'est-à-dire, compte-tenu de la condition $\tilde{h}(0, t) = \tilde{h}_e(t)$

$$\tilde{U}(0, t) - \chi \tilde{h}_e(t) = \tilde{U}_0(-\lambda_2 t) - \chi \tilde{h}_0(-\lambda_2 t). \quad (55)$$

On en déduit la valeur de $\tilde{U}(0, t)$ en fonction des grandeurs connues \tilde{h}_e , \tilde{h}_0 et \tilde{U}_0 . On voit qu'il n'aurait donc pas été possible de spécifier une condition aux limites supplémentaire en $x = 0$, dans la mesure où elle aurait pu être contradictoire avec l'information J_2 propagée par les droites caractéristiques à partir des conditions initiales. Mais l'on peut remplacer la condition aux limites $\tilde{h}(0, t) = \tilde{h}_e(t)$ sur l'élévation de la surface libre par une condition aux limites $\tilde{U}(0, t) = \tilde{U}_e(t)$ sur la vitesse ou toute combinaison linéaire (ou non linéaire) de ces deux conditions.

La donnée des deux conditions initiales et de la condition aux limites permet donc de déterminer la valeur de J_1 sur toute la demi-droite $x = 0$ et $t \geq 0$. On peut alors déterminer J_1 et J_2 dans toute la région 2 définie par $x \geq c_0 t$. En effet, par un point (x_*, t_*) de cette région passe une droite caractéristique \mathcal{C}_1 d'équation $x = x_* + \lambda_1(t - t_*)$ qui coupe l'axe $x = 0$ en $\tau = t_* - x_*/\lambda_1 \geq 0$ et une droite caractéristique \mathcal{C}_2 d'équation $x = x_* + \lambda_2(t - t_*)$ qui coupe l'axe $t = 0$ en $a = x_* - \lambda_1 t_*$. Les valeurs, connues, des invariants $J_1(0, \tau)$ et $J_2(a, 0)$ en ces points d'intersection permettent de calculer $\tilde{h}(x_*, t_*)$ et $\tilde{U}(x_*, t_*)$ au point considéré.

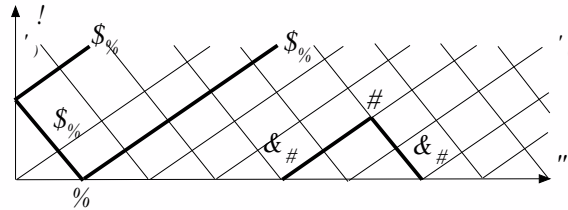


Figure 8: *Domaine S_P “sous l’influence” du point P et domaine Q_M “qui influence” le point M .*

Pour conclure ce paragraphe, la figure 8 montre le domaine S_P du plan (x, t) pour le quel la solution est “sous l’influence” d’un point P ainsi que le domaine Q_M “qui influence” la solution au point M . Ces domaines sont des réunion de morceau de droites caractéristiques. Ces considérations géométriques permettent de déterminer le nombre exact de conditions que l’on peut imposer à la frontière d’un domaine du plan (x, t) pour obtenir un problème bien posé.

3 Ondes de surface linéaires et dispersives

On s'intéresse ici au cas des ondes de surface obtenues pour une profondeur quelconque. On utilise pour cela le modèle des équations d'Euler incompressibles dans une géométrie où le fond est horizontal et la surface du fluide en interaction libre avec l'atmosphère. On se limite au cas d'une seule dimension horizontale, la dimension verticale étant traitée explicitement ici. Les équations sont donc bi-dimensionnelles (2D). L'étude des petits mouvements autour du repos conduit à un système linéarisé où la surface libre est remplacée par une surface fixe. Ce système n'est pas sous la forme standard que nous avons présentée pour la classification des EDP, mais on peut définir une relation de dispersion. On montre que le système décrit des ondes dispersives qui peuvent se propager vers la droite ou vers la gauche. On étudie alors le train d'ondes généré par une condition initiale lorsque la direction horizontale est infinie pour mettre en évidence la notion de vitesse de groupe d'un paquet d'ondes et de dispersion d'une impulsion initiale localisée.

3.1 Équations d'Euler incompressibles 2D à surface libre

On considère un écoulement à surface libre bi-dimensionnel sur un fond plat horizontal. On note respectivement \underline{e}_x et \underline{e}_z les vecteurs unitaires horizontal et vertical. On modélise ici cet écoulement par les équations d'Euler 2D incompressibles qui s'écrivent

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \rho_0 \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\operatorname{grad}} p - \rho_0 g \underline{e}_z \quad (56)$$

où g est la gravité, ρ_0 est la masse volumique constante du fluide, $\underline{U}(x, z, t) = (u, w)$ le champ de vitesse, $p(x, z, t)$ le champ de pression et $\frac{d}{dt} = \partial_t + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}}$ la dérivée particulaire. On a donc négligé les effets de compressibilité (ρ_0 est constant) et la viscosité (le tenseur des contraintes est réduit à un tenseur de pression, i.e. le fluide est parfait).

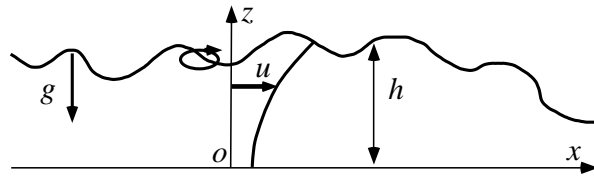


Figure 9: Écoulement à surface libre de profondeur quelconque.

La condition aux limites au fond spécifie que la vitesse du fluide normale à

la paroi est nulle. En choisissant l'origine des z au fond, dont l'équation est donc $z = 0$, cette condition aux limites s'écrit $w(x, 0, t) = 0$.

La condition aux limites cinématique de surface libre spécifie que la vitesse normale du fluide est égale à la vitesse normale de la surface. En notant $h(x, t)$ l'élévation de la surface libre dont l'équation s'écrit alors $F(x, z, t) = z - h(x, t) = 0$, cette condition s'écrit

$$\frac{dF}{dt}[x, h(x, t), t] = w[x, h(x, t), t] - \partial_t h(x, t) - u[x, h(x, t), t] \partial_x h(x, t) = 0 \quad (57)$$

que l'on écrira " $\partial_t h + u \partial_x h = w$ en $z = h(x, t)$ " de manière synthétique.

La dernière condition aux limites spécifie l'égalité des forces de contact à l'interface entre le fluide et l'atmosphère. On suppose que cette atmosphère est un fluide parfait beaucoup plus léger que la couche fluide que l'on étudie et que l'on peut donc considérer que sa pression p_a est constante. La condition aux limites dynamique s'écrit donc " $p = p_a$ en $z = h(x, t)$ ". Dans ce raisonnement, on a négligé la tension superficielle qui aurait pour effet d'ajouter à p_a un terme en γ/R où R est le rayon de courbure de la surface libre et γ une constante qui vaut $72 \cdot 10^{-3}$ N/m pour l'interface entre l'eau et l'air à température ambiante. Pour cet exemple, l'effet de tension superficielle n'est sensible que pour des échelles plus petites que 1,5 cm environ.

Les trois conditions aux limites qui viennent compléter les équations d'Euler 2D (56) sont donc

$$\begin{cases} \partial_t h + u \partial_x h = w \\ p = p_a \end{cases} \quad \text{en } z = h(x, t) \quad \text{et} \quad w = 0 \quad \text{en } z = 0. \quad (58)$$

On suppose maintenant que l'écoulement est irrotationnel, i.e. $\text{rot } \underline{U} = \underline{0}$. Cette hypothèse entraîne qu'il existe un potentiel des vitesses $\phi(x, z, t)$ tel que $\underline{U} = \text{grad } \phi$. Comme $\text{div grad} = \Delta$ et $\frac{d\underline{U}}{dt} = \partial_t \underline{U} + \frac{1}{2} \text{grad} (\underline{U}^2) + \text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U}$, cette hypothèse permet d'écrire le système sous la forme

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 & \text{et} & \text{grad} \left[\partial_t \phi + \frac{1}{2} (\text{grad } \phi)^2 + \frac{p}{\rho_0} + g z \right] = \underline{0} \\ \partial_t h + \partial_x \phi \partial_x h = \partial_z \phi & \text{en } z = h(x, t) & \text{et} & \partial_z \phi = 0 & \text{en } z = 0. \end{cases} \quad (59)$$

Comme ϕ est défini à une fonction $C(t)$ près du temps, on peut éliminer la pression du système d'équations en écrivant

$$p(x, z, t) = p_a - \rho_0 \left[\partial_t \phi + \frac{1}{2} (\text{grad } \phi)^2 + g(z - h_0) \right] \quad (60)$$

On doit donc résoudre l'équation de Laplace $\Delta \phi = 0$ (elliptique) avec des conditions aux limites sur la frontière du domaine, dont une est libre. Comme

le mouvement $h(x, t)$ de la surface libre est inconnu, il est normal qu'il y ait deux conditions aux limites au lieu d'une sur cette frontière.

3.2 Relations de dispersion des ondes de surface

On s'intéresse maintenant aux petites oscillations de la couche fluide autour de l'état de repos caractérisé par $h = h_0$ et $\underline{U} = \underline{0}$. Pour cet état hydrostatique, la pression est $p_0(z) = p_a - \rho_0 g (z - h_0)$. On définit alors les notations

$$h(x, t) = h_0 + \tilde{h}(x, t), \quad p(x, z, t) = p_0(z) + \tilde{p}(x, z, t) \quad \text{et} \quad \phi(x, z, t) = \tilde{\phi}(x, z, t)$$

et l'on suppose que \tilde{h}/h_0 et \tilde{p}/p_0 sont d'ordre $\epsilon \ll 1$. On suppose de même que la quantité adimensionnelle $\tilde{\phi}/(h_0\sqrt{g h_0})$ est aussi petite et d'ordre ϵ . On doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{h} - \partial_z \tilde{\phi} = -\partial_x \tilde{\phi} \partial_x \tilde{h} \\ \partial_t \tilde{\phi} + g \tilde{h} = -\frac{1}{2} (\text{grad } \tilde{\phi})^2 \end{cases} \quad \text{en } z = h_0 + \tilde{h}(x, t)$$

$$\Delta \tilde{\phi} = 0 \quad \text{partout} \quad \text{et} \quad \partial_z \tilde{\phi} = 0 \quad \text{en } z = 0. \quad (61)$$

L'écart \tilde{p} à la pression hydrostatique, que l'on appelle "pression dynamique", s'écrit $\tilde{p} = -\rho_0 \left[\partial_t \tilde{\phi} + \frac{1}{2} (\text{grad } \tilde{\phi})^2 \right]$.

Les termes des premiers membres des deux conditions aux limites à la surface libres sont d'ordre 1 en ϵ alors que les termes de droite sont du second ordre. On peut donc négliger ces termes "non linéaires". D'autre part, pour toute fonction $f(h)$ dérivable, on peut écrire

$$f[h(x, t)] = f[h_0 + \tilde{h}(x, t)] = f(h_0) + O(\epsilon) = f(h_0) + \tilde{h}(x, t) f'(h_0) + O(\epsilon^2).$$

On peut donc ne garder que le premier terme $f(h_0)$ dans les conditions aux limites de surface, en négligeant les termes d'ordre supérieur en ϵ . Ceci revient à spécifier les conditions aux limites sur la surface fixe $z = h_0$ plutôt que sur la surface mobile $z = h_0 + \tilde{h}(x, t)$. L'approximation des petits mouvements réduit donc drastiquement la complexité du problème.

L'ordre dominant en ϵ de l'approximation des petits mouvements conduit donc au système linéaire

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{h} - \partial_z \tilde{\phi} = 0 \\ \partial_t \tilde{\phi} + g \tilde{h} = 0 \end{cases} \quad \text{en } z = h_0, \quad \Delta \tilde{\phi} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_z \tilde{\phi} = 0 \quad \text{en } z = 0. \quad (62)$$

À l'ordre dominant, la pression dynamique s'écrit $\tilde{p}(x, z, t) = -\rho_0 \partial_t \tilde{\phi}(x, z, t)$. On peut aussi éliminer $\tilde{h}(x, t) = -\frac{1}{g} \partial_t \tilde{\phi}(x, 0, t)$ pour obtenir le système

$$\partial_t^2 \tilde{\phi} + g \partial_z \tilde{\phi} = 0 \quad \text{en } z = h_0, \quad \Delta \tilde{\phi} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_z \tilde{\phi} = 0 \quad \text{en } z = 0. \quad (63)$$

Lorsque le domaine spatial est infini ($x \in \mathbb{R}$), on peut chercher des solutions complexes sous la forme

$$\tilde{h}(x, t) = \tilde{h}_m e^{i k x + s t} \quad \text{et} \quad \tilde{\phi}(x, z, t) = \Phi(z) e^{i k x + s t} \quad (64)$$

où \tilde{h}_m est une amplitude complexe et $\Phi(z)$ est un profil vertical qu'il faut déterminer. Ce choix de solutions est motivé par le fait que le problème est invariant par les translations en t et en x . Le problème n'étant pas invariant par les translations en z , le profil vertical $\Phi(z)$ ne peut pas être déterminé a priori.

En reportant cette expression dans les équations, on doit donc résoudre

$$s^2 \Phi(h_0) + g \Phi'(h_0) = 0, \quad \Phi''(z) - k^2 \Phi(z) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi'(0) = 0 \quad (65)$$

où $\Phi'(z)$ désigne la dérivée de $\Phi(z)$. Ce profil s'écrit $\Phi(z) = A \cosh(k z) + B \sin(k z)$ où A et B sont deux constantes à déterminer avec les deux conditions aux limites en $z = h_0$ et $z = 0$. La dernière condition entraîne $B = 0$. La première condition s'écrit alors $s^2 \cosh(k h_0) + g k \sin(k h_0) = 0$. On en déduit que $s = -i \omega$ avec $\omega^2 = g k \tanh(k h_0)$. On a alors $\Phi(z) = \Phi_m \cosh(k z)$ où Φ_m est une amplitude complexe. On peut la relier à l'amplitude complexe \tilde{h}_m et notant que la relation $\partial_t \tilde{\phi} + g \tilde{h} = 0$ en $z = 0$ entraîne que $\Phi_m = -i \frac{g}{\omega \cosh(k h_0)} \tilde{h}_m$.

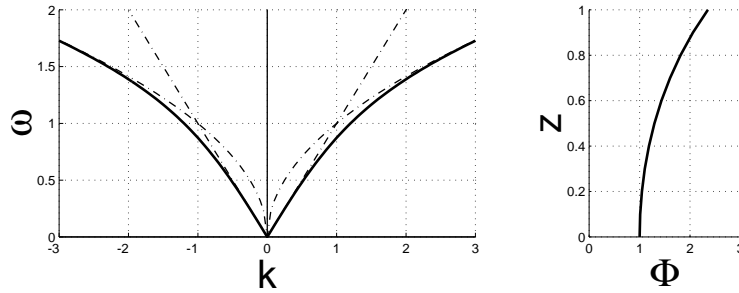


Figure 10: a) Relation de dispersion $\Omega_a(k) = \sqrt{g k \tanh(k h_0)}$ des ondes de surface. (- . -) : tangentes $\omega = \sqrt{g h_0} |k|$ et asymptotes $\omega = \sqrt{g k}$. b) Profil $\Phi(z) = \Phi_m \cosh(k z)$.

En définissant les deux fonctions

$$\Omega_a(k) = \sqrt{g k \tanh(k h_0)} \quad \text{et} \quad \Omega_s(k) = \text{sign}(k) \Omega_a(k) \quad (66)$$

où $\text{sign}(k)$ est le signe de k , le système linéaire décrit donc des ondes dispersives dont les relations de dispersion sont $\Omega_1(k) = \Omega_s(k)$ et $\Omega_2(k) = -\Omega_s(k)$. Les deux familles de solutions correspondantes s'écrivent

$$\left[\tilde{h}_1(x, t), \tilde{\phi}_1(x, z, t) \right] = \tilde{h}_{1m} \left[1, \frac{-i g}{\Omega_s(k)} \frac{\cosh(k z)}{\cosh(k h_0)} \right] e^{i k x - i \Omega_s(k) t}$$

$$\left[\tilde{h}_2(x, t), \tilde{\phi}_2(x, z, t) \right] = \tilde{h}_{2m} \left[1, \frac{ig}{\Omega_s(k)} \frac{\cosh(kz)}{\cosh(kh_0)} \right] e^{ikx + i\Omega_s(k)t} \quad (67)$$

où \tilde{h}_{1m} et \tilde{h}_{2m} sont des amplitudes complexes arbitraires.

En notant $\tilde{h}_{1m} = \frac{H}{2} e^{i\varphi}$ et en prenant la partie réelle du premier mode pour un nombre d'onde k donné, on obtient une “vague” de hauteur H de la forme $\tilde{h}_1(x, t) = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega_1 t + \varphi)$ avec $\omega_1 = \Omega_1(k)$. Le champ de vitesse réel associé au potentiel $\tilde{\phi}_1(x, z, t)$ est alors

$$\underline{U}_1(x, z, t) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{w}_1 \end{pmatrix} = \frac{H g k}{2 \omega_1 \cosh(kh_0)} \begin{pmatrix} \cosh(kz) \sin(kx - \omega_1 t + \varphi) \\ \sinh(kz) \cos(kx - \omega_1 t + \varphi) \end{pmatrix} \quad (68)$$

On en déduit que les trajectoires sont des ellipses en résolvant le système $(\dot{x}, \dot{z}) = \underline{U}_1(x_0, y_0, t)$ où (x_0, y_0) est la position moyenne de la trajectoire. Cette approximation est justifiée par le fait que l'on étudie des petits mouvements ce qui entraîne que H est un petit paramètre. Le champ de pression dynamique réel s'écrit alors $\tilde{p}_1(x, z, t) = -\rho_0 g \frac{H}{2} \frac{\cosh(kz)}{\cosh(kh_0)} \cos(kx - \omega_1 t + \varphi)$. La figure 11 présente différentes grandeurs associées à cette onde à deux instants différents. Il s'agit d'une onde monochromatique qui se propage vers la droite à la vitesse de phase $c_{\varphi 1} = \omega_1/k$.

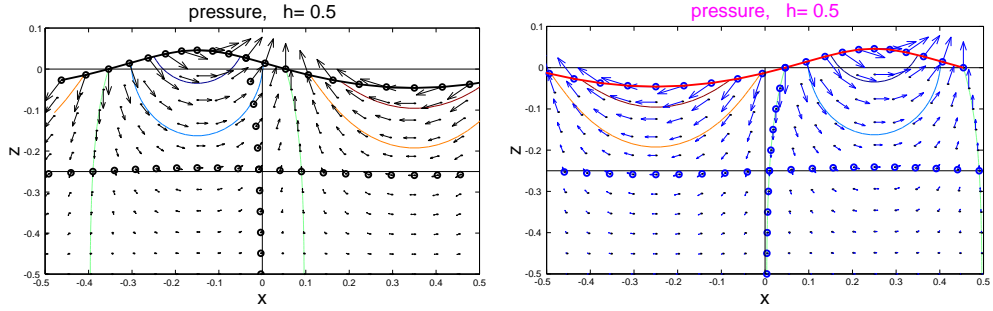


Figure 11: Onde de surface se propageant vers la droite. Champ de pression (iso-contours), vecteurs vitesse et mouvement de particules (matérialisées par des points).

On note que les vitesses de phase $c_\varphi = \omega/k$ de ces ondes monochromatiques sont respectivement $c_{\varphi 1}(k) = c_{\varphi s}(k) > 0$ et $c_{\varphi 2}(k) = -c_{\varphi s}(k) < 0$ avec $c_{\varphi s}(k) = \Omega_s(k)/k$. Les ondes sont bien dispersives dans la mesure où ces vitesses de phase ne sont pas constantes lorsque k varie. On définit les “vitesses de groupe” $c_g(k) = \Omega'(k)$ associées à un nombre d'onde k par les relations $c_{g1}(k) = \Omega'_1(k) = c_{gs}(k)$ et $c_{g2}(k) = \Omega'_2(k) = -c_{gs}(k)$ avec

$$c_g(k) = c_\varphi(k) \left[\frac{1}{2} + \frac{k h_0}{\sinh(2k h_0)} \right]. \quad (69)$$

La justification du qualificatif de “vitesse de groupe” sera donnée plus loin. Pour le moment, on peut comparer les vitesses de phase et de groupe sur la figure 12 en remarquant que $c_g(k) \sim c_\varphi(k) \sim \sqrt{g h_0}$ pour k petit (grandes longueurs d’onde) et $c_g(k) \sim \frac{1}{2}c_\varphi(k) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}$ pour k grand (petites longueurs d’onde). On retrouve le fait que les grandes ondes sont non dispersives.

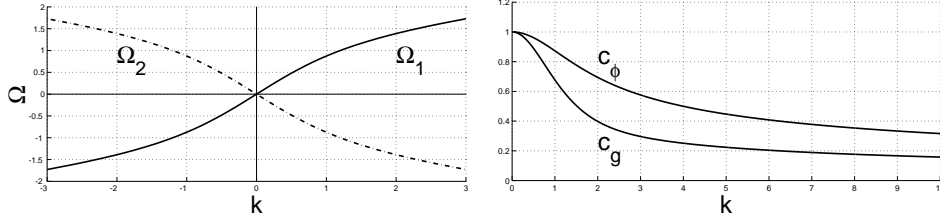


Figure 12: a) Relations de dispersion $\Omega_1(k) = \Omega_s(k)$ et $\Omega_2(k) = -\Omega_s(k)$. b) Vitesse de phase $c_{\varphi s}(k) = \Omega_s(k)/k$ et vitesse de $c_{gs}(k) = \Omega'_s(k)$ des ondes de surface.

Comme le système est linéaire, la partie réelle de toute combinaison linéaire de ces ondes est une solution. Une solution quelconque est donc la somme d’ondes se propageant à droite et à gauche ayant des nombres d’onde $k \in \mathbb{R}$ différents. Une telle solution s’écrit

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} \left[\hat{h}_{10}(k) e^{-i\Omega_s(k)t} + \hat{h}_{20}(k) e^{i\Omega_s(k)t} \right] e^{ikx} dk \\ \tilde{\phi}(x, z, t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{-ig}{\Omega_s(k)} \left[\hat{h}_{10}(k) e^{-i\Omega_s(k)t} - \hat{h}_{20}(k) e^{i\Omega_s(k)t} \right] \frac{\cosh(kz)}{\cosh(kh_0)} e^{ikx} dk \end{aligned}$$

où $\hat{h}_{10}(k)$ et $\hat{h}_{20}(k)$ sont des fonctions intégrables quelconques. La pression dynamique \tilde{p} s’en déduit par la relation $\tilde{p}(x, z, t) = -\rho_0 \partial_t \tilde{\phi}(x, z, t)$.

3.3 Dispersion d’un paquet d’ondes et vitesse de groupe

En restant dans le cadre de l’approximation linéaire et d’un milieu infini dans la direction horizontale, on veut déterminer l’écoulement $[\tilde{h}(x, t), \tilde{\phi}(x, z, t)]$ issu de la condition initiale

$$[\tilde{h}(x, 0), \tilde{\phi}(x, z, 0)] = [\tilde{h}_0(x), \tilde{\phi}_0(x, z)]. \quad (70)$$

On suppose que cette condition initiale décrit bien un champ de vitesse incompressible (il est irrotationnel par construction) vérifiant la condition aux limites du fond. On a donc $\Delta \tilde{\phi}_0 = 0$ et $\partial_z \tilde{\phi}_0 = 0$ en $z = 0$.

Pour résoudre ce problème, on décompose la condition initiale en intégrale de Fourier en écrivant

$$\tilde{h}_0(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{h}_0(k) e^{i k x} dk \quad \text{et} \quad \tilde{\phi}_0(x, z) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}_0(k) \cosh(k z) e^{i k x} dk .$$

La forme en $\cosh(k z)$ du profil vertical est imposée par les relations $\Delta \tilde{\phi}_0 = 0$ et $\partial_z \tilde{\phi}_0 = 0$ en $z = 0$. Comme on s'intéresse à des conditions initiales réelles, on a $\hat{h}_0(-k) = \hat{h}_0^*(k)$ et $\hat{\phi}_0(-k) = \hat{\phi}_0^*(k)$ où * désigne le complexe conjugué.

En appliquant cette condition initiale à la forme générale des solutions que l'on a déterminée au paragraphe précédent, on peut écrire le système

$$\begin{pmatrix} \hat{h}_0(k) \\ \hat{\phi}_0(k) \cosh(k z) \end{pmatrix} = \hat{h}_{10} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-i g}{\Omega_s(k)} \frac{1}{\cosh(k h_0)} \end{pmatrix} + \hat{h}_{20} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i g}{\Omega_s(k)} \frac{1}{\cosh(k h_0)} \end{pmatrix} \quad (71)$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \hat{h}_{10}(k) + \hat{h}_{20}(k) &= \hat{h}_0(k) \\ \hat{h}_{10}(k) - \hat{h}_{20}(k) &= \frac{i}{g} \hat{\phi}_0(k) \cosh(k h_0) \Omega_s(k) . \end{aligned} \quad (72)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \hat{h}_{10}(k) &= \frac{1}{2} \left[\hat{h}_0(k) + \frac{i}{g} \hat{\phi}_0(k) \cosh(k h_0) \Omega_s(k) \right] \\ \hat{h}_{20}(k) &= \frac{1}{2} \left[\hat{h}_0(k) - \frac{i}{g} \hat{\phi}_0(k) \cosh(k h_0) \Omega_s(k) \right] . \end{aligned} \quad (73)$$

On peut alors s'intéresser à la portion de solution constituée d'ondes dont la vitesse de phase est dirigée vers la droite et qui s'écrit

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{h}_{10}(k) e^{i k x - i \Omega_s(k) t} dk \\ \tilde{\phi}_1(x, z, t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{h}_{10}(k)}{-\Omega_s(k)} \frac{\cosh(k z)}{\cosh(k h_0)} e^{i k x - i \Omega_s(k) t} dk . \end{aligned} \quad (74)$$

En choisissant une fonction $\hat{h}_{10}(k)$ quelconque, on définit, par transformée de Fourier inverse, une fonction $\tilde{h}_{10}(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{h}_{10}(k) e^{i k x} dk$ qui vérifie $\tilde{h}_{10}(x) = \tilde{h}_1(x, 0)$. On peut aussi en déduire la fonction $\tilde{\phi}_{10}(x, z) = \tilde{\phi}_1(x, z, 0)$ et considérer le couple $[\tilde{h}_{10}(x), \tilde{\phi}_{10}(x, z)]$ comme une condition initiale.

On considère tout d'abord le cas où la condition initiale est un "paquet d'ondes" de nombres d'ondes centrés autour de k_0 et défini par les relations

$$\hat{h}_{10}(k) = \tilde{h}_g \left[\hat{E}(k - k_0) + \hat{E}(k + k_0) \right] \iff \tilde{h}_{10}(x) = 2 \tilde{h}_g \cos(k_0 x) E(x)$$

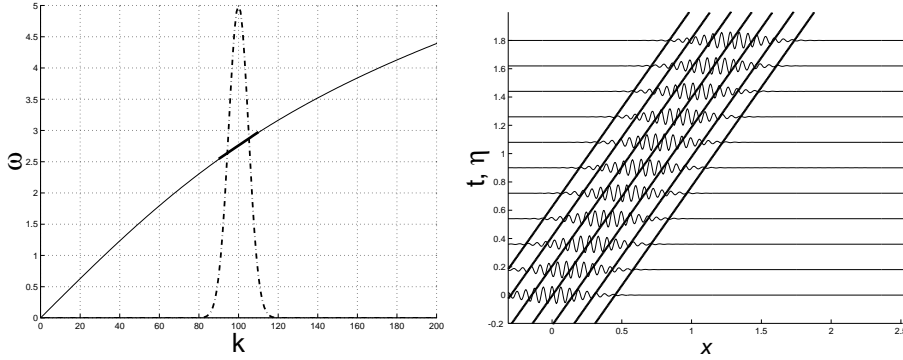


Figure 13: Cas du paquet d'onde de nombre d'onde k_0 . a) Relation de dispersion $\omega = \Omega_s(k)$, courbe $\hat{h}_{10}(k)$ et droite tangente à la relation de dispersion en $k = k_0$ pour $k \geq 0$. b) Évolution temporelle de la solution et droite représentant la vitesse de groupe $c_g(k_0)$.

où \tilde{h}_g est une amplitude réelle, $\hat{E}(q)$ une fonction très localisée autour de zéro et $E(x)$ sa transformée de Fourier inverse. Ce choix correspond à une condition initiale constituée d'une oscillation spatiale de période $2\pi/k_0$ modulée par l'enveloppe $E(x)$ (voir figure 13). Par exemple, si $\hat{E}(k) = e^{-\frac{k^2}{2\chi^2}}$ est une gaussienne d'écart-type χ , l'enveloppe $E(x) = \chi \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une gaussienne d'écart type $1/\chi$.

Si $\hat{E}(q)$ est très localisée autour de $q = 0$ (c'est-à-dire pour χ très petit dans la cas d'une gaussienne), on peut remplacer $\Omega_s(k)$ par son approximation linéaire $\Omega_s(k) = \Omega_s(k_0) + \Omega'_s(k_0)(k - k_0) + O[(k - k_0)^2]$ dans l'intégrale (74) qui permet de calculer $\tilde{h}_1(x, t)$ et négliger les termes d'ordre 2. On obtient alors l'expression

$$\tilde{h}_1(x, t) = \cos[k_0 x - \Omega_s(k_0) t] E[x - c_{g1}(k_0) t] \quad (75)$$

où l'on a noté $c_{g1}(k) = \Omega'_1(k) = \Omega'_s(k)$ la "vitesse de groupe" associée au nombre d'onde k . Cette appellation vient du fait que l'enveloppe du paquet d'onde $\tilde{h}_1(x, t)$ se propage bien à la vitesse de groupe $c_{1g}(k_0)$ alors que la vitesse de phase de l'onde porteuse est $c_{\varphi 1}(k_0) = \Omega_1(k_0)/k_0$. Ces deux vitesses sont différentes du fait que les ondes sont dispersives.

Le deuxième exemple permettant d'illustrer la notion de vitesse de groupe et de dispersion est le cas de "l'impulsion de Dirac" à droite définie par la relation

$$\hat{h}_{10}(k) = \tilde{h}_d \iff \tilde{h}_{10}(x) = 2\pi \tilde{h}_d \delta(x) \quad (76)$$

où \tilde{h}_d une amplitude réelle et $\delta(x)$ la distribution de Dirac. La solution issue

de cette condition initiale s'écrit

$$\tilde{h}_1(x, t) = \tilde{h}_d \int_{\mathbb{R}} e^{i k x - i \Omega_s(k) t} dk . \quad (77)$$

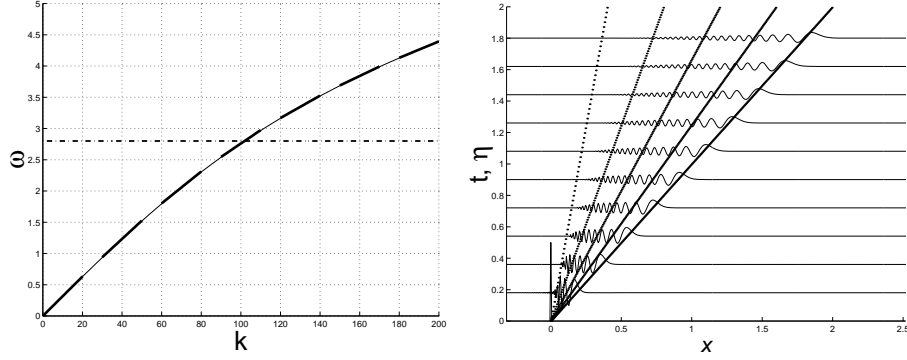


Figure 14: Cas du paquet de l'impulsion de Dirac. a) Relation de dispersion $\omega = \Omega_s(k)$, fonction constante $\hat{h}_{10}(k)$, et droites tangentes à la relation de dispersion en plusieurs nombre d'onde k pour $k \geq 0$. b) Évolution temporelle de la solution et droites représentant des vitesses de groupe $c_g(k)$.

L'évolution de ce profil spatial en fonction du temps est représentée sur la figure 14. On voit que l'enveloppe du signal s'élargit au cours du temps et se disperse en un continuum de paquets d'ondes balayant tous les vecteurs k et dont les vitesses de groupe sont $c_{g1}(k) = \Omega'_s(k)$. Pour aller au-delà de cette observation numérique, on peut utiliser la "méthode de la phase stationnaire" qui permet de calculer le comportement, lorsque t devient grand, de l'intégrale $I(t) = \int_{\mathbb{R}} g(k) e^{i \Psi(k) t} dk$ où $g(k)$ et $\Psi(k)$ sont des fonctions continues quelconques. On se contente ici d'indiquer le résultat de cette méthode :

$$\begin{aligned} \text{si } \Psi \text{ est monotone} & : I(t) \text{ décroît exponentiellement} \\ \text{s'il existe } k_* \text{ tel que } \Psi'(k_*) = 0 & : I(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} G_* e^{i \Psi(k_*) t} \end{aligned} \quad (78)$$

avec $G_* = g(k_*) \sqrt{\frac{2\pi}{|\Psi''(k_*)|}} e^{i \text{sign}[\Psi''(k_*)] \frac{\pi}{4}}$. Pour appliquer ce résultat à l'étude du comportement de $\tilde{h}_1(x, t)$ aux temps longs, on écrit

$$I(t) = \tilde{h}_1(ct, t) = \tilde{h}_d \int_{\mathbb{R}} e^{i [k c - \Omega_s(k)] t} dk = \tilde{h}_d \int_{\mathbb{R}} e^{i \Psi(k) t} dk \quad (79)$$

où c est une vitesse constante et $\Psi(k) = k c - \Omega_s(k)$. Ceci revient à regarder le comportement de $\tilde{h}_1(x, t)$ en suivant une trajectoire d'équation $x = ct$, c'est-à-dire une particule fictive se déplaçant à une vitesse c choisie arbitrairement. La dérivée de la phase $\Psi(k)$ est alors $\Psi'(k) = c - c_{gs}(k)$.

Lorsque $c > \sqrt{g h_0}$, c'est-à-dire lorsque l'on se déplace plus vite que la vitesse maximale des ondes, la phase $\Psi(k)$ est une fonction monotone (croissante). Dans ce cas, $I(t)$, donc \tilde{h}_1 le long de la droite $x = ct$, décroît exponentiellement.

Lorsque $0 < c < \sqrt{g h_0}$, il existe un seul nombre d'onde k_* tel que $\Psi'(k_*) = c - c_g(k_*) = 0$. C'est le nombre d'onde dont la vitesse de groupe est égale à la vitesse c que l'on a choisi. On peut donc écrire

$$I(t) = \tilde{h}_1(ct, t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} G(k_*) e^{[i k_* c - \Omega_s(k_*)] t} \quad (80)$$

avec $G(k_*) = \tilde{h}_d \sqrt{\frac{2\pi}{|\Omega_s''(k_*)|}} e^{-i \text{sign}[\Omega_s''(k_*)] \frac{\pi}{4}}$. Comme k_* dépend du choix de $c = \frac{x}{t}$, on peut définir la notation $k_* = k_c(\frac{x}{t})$ valable pour $\frac{x}{t} \leq \sqrt{g k_0}$. Lorsque cette inégalité est vérifiée, on peut alors écrire

$$\tilde{h}_1(x, t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} G[k_c(\frac{x}{t})] e^{i k_c(\frac{x}{t}) x - \Omega_s[k_c(\frac{x}{t})] t}. \quad (81)$$

Puisque t est grand, $k_c(\frac{x}{t})$ varie très peu lorsque x varie sur quelques longueurs d'ondes. Le long de la trajectoire $x = ct$, on observe donc le paquet d'ondes de nombre d'onde $k_c(c)$ dont la vitesse de groupe est justement $c_g[k_c(c)] = c$. On retrouve ici le fait que les paquets d'onde voyagent à la vitesse de groupe.

Conclusion

Nous avons décrit de manière très complète les ondes linéaires d'une couche fluide comprise entre un fond plat et une surface libre constituant une interface avec l'atmosphère. Nous n'avons considéré qu'une seule direction horizontale, mais la linéarité des équations, due au fait que l'on s'intéresse aux petits mouvements, permet d'étendre cette étude au cas où il existe deux directions horizontales. Il suffit pour cela de superposer plusieurs ondes monochromatiques ayant chacune sa propre direction de propagation.

Dans le cas d'une profondeur quelconque h_0 , une onde de surface monochromatique correspond à une ondulation sinusoïdale de la surface libre qui se propage à une vitesse de phase $c_\varphi(k)$ dépendant de sa longueur d'onde $L = 2\pi/k$. Les particules fluides décrivent des ellipses qui s'aplatissent et se rétrécissent lorsque l'on se rapproche du fond. Ces ondes sont dispersives et leur vitesse de phase décroît de $\sqrt{g h_0}$ à zéro lorsque k croît de zéro à l'infini. La vitesse de groupe des paquets d'ondes, obtenue en dérivant par rapport à k la relation de dispersion, est égale à la vitesse de phase pour $k = 0$ et à sa moitié lorsque k tend vers l'infini. Les grandes ondes sont donc plus rapides

que les petites. Tous les résultats que nous avons présentés pour les ondes dispersives l'ont été dans le cas d'un domaine spatial infini. On peut donc les généraliser au cas où l'écoulement de base est $h = h_0$ et $\underline{U}_0 = U_0 \underline{e}_x$ en effectuant un simple changement de repère galiléen.

Dans le cas où la profondeur h_0 est petite devant les longueurs d'ondes $L = 2\pi/k$, ces ondes deviennent non dispersives et la vitesse de phase est égale à $\sqrt{gh_0}$ dans le cas $U_0 = 0$ et donc $U_0 + \sqrt{gh_0}$ dans le cas général. Ce résultat se retrouve à partir des équations de Saint Venant linéaires qui décrivent la dynamique de la couche fluide lorsque la profondeur est petite. L'existence de droites caractéristiques et d'invariants de Riemann pour ces équations permet d'aborder le cas où le domaine spatial est limité par des parois. La méthode des caractéristiques permet de déterminer le nombre adéquat de conditions aux limites nécessaires pour obtenir un problème bien posé.

On peut maintenant comparer la réponse d'une surface libre à une perturbation initiale localisée (par exemple un caillou dans l'eau) dans le cas des ondes dispersives en profondeur quelconque ou hyperboliques en faible profondeur. Pour les ondes dispersives, l'impulsion initiale génère des paquets d'ondes qui se propagent à leur vitesses de groupes respectives. Les paquets d'ondes les plus rapides correspondent aux longueurs d'ondes les plus grandes. Les vitesses sont donc comprises entre $U_0 + \sqrt{gh_0}$ et $U_0 - \sqrt{gh_0}$ en tenant compte de la vitesse moyenne U_0 . Pour les ondes hyperboliques, décrites par les équations de Saint Venant, la perturbation initiale se décompose en deux intumescences qui se propagent sans déformation avec leurs vitesses respectives $U_0 + \sqrt{gh_0}$ et $U_0 - \sqrt{gh_0}$. On voit donc que les deux approches, dispersives et non dispersives, se rejoignent si l'on ne considère que les grandes ondes.