EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 0.1 Propagation d'un petit hydrogramme

On considère une rivière d'axe horizontal Ox est modélisée par les équations de Saint Venant 1D sur un fond plat et sans frottement.

1) Ecrire ces équations en utilisant les notations $U(x,t)$ pour la vitesse et $h(x,t)$ pour la hauteur d'eau.
2) On suppose que l'écoulement est à l'équilibre avec une hauteur h_0 et une vitesse $U_0 > 0$ constante. Écrire les équations d'évolution d'une petite perturbation $[\widetilde{h}(x,t), \widetilde{U}(x,t)]$ dans le cadre de l'approximation linéaire.
3) On suppose qu'à $t = 0$ les conditions initiales sont $\widetilde{h}(x,0) = 0$ et $\widetilde{U}(x,0) = 0$ pour $x \geq 0$ et qu'une petite perturbation est introduite par l'intermédiaire des conditions aux limites suivantes :
$$\begin{aligned} \widetilde{h}(0,t) = \widetilde{h}_0(t) &= \widetilde{h}_* \frac{t}{t_*} \qquad \text{pour } t \in [0, t_*] \\ \text{et} \qquad \widetilde{h}(0,t) &= \widetilde{h}_* \qquad \text{pour } t \geq t_* \; . \end{aligned}$$
et $\widetilde{U}(0,t) = 0$ pour $t \geq 0$. En supposant que l'écoulement de base (h_0, U_0) est fluvial, montrer que $J_- = \widetilde{U}(x,t) - \chi\, \widetilde{h}(x,t) = 0$ avec $\chi = \sqrt{g/h_0}$ pour $x \geq 0$ et $t \geq 0$.
4) En déduire $\widetilde{U}(0,\tau)$ pour tout $\tau \geq 0$.
5) En déduire $\widetilde{h}(x,t)$ et $\widetilde{U}(x,t)$ pour tout $x \geq 0$ et tout $t \geq 0$.
6) Tracer schématiquement le profil $h(x,t) = h_0 + \widetilde{h}(x,t)$ à divers instants.
7) Le problème est-il bien posé dans le cas torrentiel ?

Corrigé page **??**

EXERCICE 0.2 Intumescences linéaires

On s'intéresse à la dynamique d'un écoulement à surface libre dans un canal 1D à fond plat dont l'extension horizontale peut être considérée comme infinie. On suppose que la profondeur caractéristique est faible devant l'extension horizontale des phénomènes étudiés, de sorte que le mouvement peut être modélisé par les équations de Saint Venant. On note alors $h(x,t)$ la hauteur de la couche d'eau et $U(x,t)$ sa vitesse moyenne. On suppose de plus que les forces de frottement sont négligeables. On s'intéresse aux petites fluctuations autour d'un état de base tel que $U = 0$ et $h = h_0$.

1) Écrire les équations de Saint Venant linéarisées autour de cet état de repos en notant $\widetilde{h}(x,t)$ et $\widetilde{U}(x,t)$ les petites fluctuations.

On s'intéresse à l'évolution linéaire de la couche d'eau connaissant les fluctuations initiales $\widetilde{h}(x,0) = \widetilde{h}_0(x)$ et $\widetilde{U}(x,0) = \widetilde{U}_0(x)$ définies de la façon suivante :

$$\widetilde{h}_0(x) = \widetilde{h}_m \quad \text{et} \quad \widetilde{U}_0(x) = \mu \sqrt{\frac{h_0}{g}}\, \widetilde{h}_m \quad \text{pour} \quad x \leq 0$$

$$\widetilde{h}_0(x) = \widetilde{h}_m \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \text{et} \quad \widetilde{U}_0(x) = \mu \sqrt{\frac{h_0}{g}}\, \widetilde{h}_m \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \text{pour} \quad x \in [0, L]$$

$$\widetilde{h}_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{U}_0(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \geq L$$

où L est une longueur donnée et μ un coefficient sans dimension.

Pour chacun des cas $\mu \in \{-1, 0, 1\}$ considérés ci-après, on supposera que les équations de Saint Venant linéarisées restent valides. On divisera le demi-plan (x,t) avec $t > 0$ en régions caractéristiques de l'évolution de la couche d'eau (écoulements uniformes, ondes simples, etc.) et on tracera les profils spatiaux $\widetilde{h}(x,t)$ et $\widetilde{U}(x,t)$ pour différents temps caractéristiques.

2) Tracer les courbes (ou droites) caractéristiques C_1 et C_2 dans le demi-plan (x,t) avec $t > 0$. Indiquer l'expression des invariants de Riemann $J_1(\widetilde{h}, \widetilde{U})$ et $J_2(\widetilde{h}, \widetilde{U})$. On pourra noter $c_0 = \sqrt{g\, h_0}$ et $\chi = \sqrt{\frac{g}{h_0}}$.
3) Vérifier que $\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_0(x - c_0\, t)$ et $\widetilde{U}(x,t) = \widetilde{U}_0(x - c_0\, t)$ avec $c_0 = \sqrt{g\, h_0}$ sont solutions du problème pour une valeur de μ que l'on précisera en reportant ces expression dans les équations.
4) Calculer la solution du problème pour le cas $\mu = 1$. Indiquer la valeur des invariants de Riemann le long des courbes caractéristiques. Représenter une partition du demi-plan (x,t) en trois régions pour lesquelles l'écoulement est un écoulement uniforme ou une onde simple. Tracer enfin les profils $\widetilde{h}(x,t)$ et $\widetilde{U}(x,t)$ pour un temps $t > 0$.
5) Même question pour le cas $\mu = -1$.

Corrigé page **??**